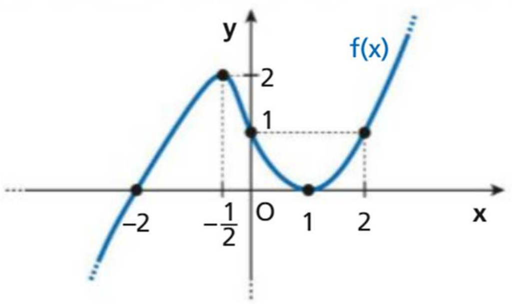
1. Considera il grafico della funzione $f(x)$ riportato nella figura 1. Determina:

$$f(1) = \_\_\_\_\_ \qquad 2^{f(-2)} = \_\_\_\_\_ \qquad 3^{f\left(-\frac{1}{2}\right)} = \_\_\_\_\_ \qquad 4^{f(2)} = \_\_\_\_\_$$

A. $2^x - 4^{f(0)} = 2^{f\left(-\frac{1}{2}\right)}$

B. $2^{f(x)} > 1$



$f(1) = \mathbf{0}$ $\quad 2^{f(-2)} = 2^0 = \mathbf{1}$ $\quad 3^{f\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3^2 = \mathbf{9}$ $\quad 4^{f(2)} = 4^1 = \mathbf{4}$

A. $2^x - 4^1 = 2^2 \qquad 2^x = 8 \qquad \boldsymbol{x = 3}$

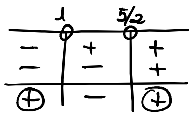
B. $2^{f(x)} > 2^0 \qquad f(x) > 0 \qquad \boldsymbol{x > -2 \ \wedge \ x \neq 1}$

2. Determina il dominio di **una** delle seguenti funzioni, studiane il segno e determinane gli eventuali zeri: $y = \frac{x-1}{4^{2x-5}-1}$, $y = \frac{1}{\log\,(2^x-1)}$

$$y = \frac{x-1}{4^{2x-5}-1}$$

Dominio: $4^{2x-5} - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 4^{2x-5} \neq 4^0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x \neq \frac{5}{2}}$

$\boldsymbol{f(x) > 0}$: $\quad \frac{x-1}{4^{2x-5}-1} > 0 \qquad N > 0: \ x > 1 \qquad D > 0: \ x > \frac{5}{2}$



$\boldsymbol{x < 1 \ \vee \ x > \frac{5}{2}}$

$\boldsymbol{f(x) = 0}$: $\quad \frac{x-1}{4^{2x-5}-1} = 0 \qquad \boldsymbol{x = 1}$

$$y = \frac{1}{\log\,(2^x-1)}$$

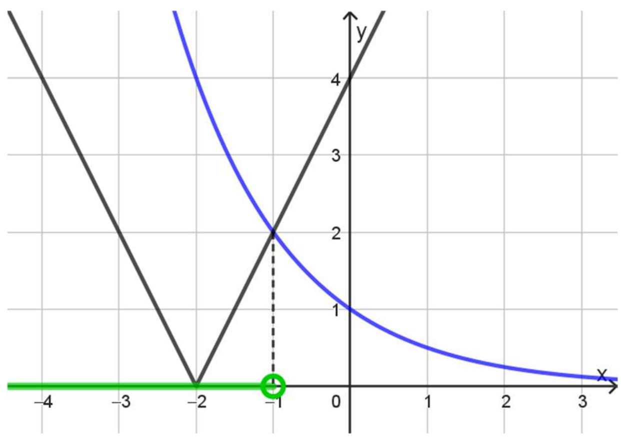
Dominio: $\begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ \log\,(2^x-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x > 2^0 \\ 2^x - 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2^x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x > 0 \ \wedge \ x \neq 1}$

$\boldsymbol{f(x) > 0}$: $\quad \frac{1}{\log\,(2^x-1)} > 0 \Rightarrow \log\,(2^x-1) > 0 \Rightarrow 2^x - 1 > 1 \Rightarrow \boldsymbol{x > 1}$

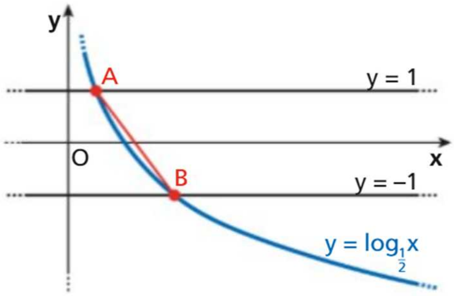
$\boldsymbol{f(x) = 0}$: $\quad \frac{1}{\log\,(2^x-1)} = 0 \qquad \boldsymbol{\nexists x \in \mathbb{R}}$

3. Risolvi la disequazione $2^{-x} > |2x + 4|$ usando il metodo grafico.

$\boldsymbol{x < -1}$



4. Trova le coordinate di A e B nella figura 2 e calcola la lunghezza del segmento AB.



Di A e di B conosco l'ordinata, perciò posso determinare l'ascissa:

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{1}{2};1\right)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad B(2;-1)$$

Determino la lunghezza del segmento:

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \frac{5}{2}$$

5. Il broccolo romanesco ha una struttura molto affascinante: la parte che si consuma normalmente è composta da una serie di infiorescenze disposte lungo una spirale logaritmica. Il processo di accrescimento del raggio delle infiorescenze (o rosette) si può descrivere con l'equazione $r = 2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{\frac{1}{7}t}$ (t indica il tempo in giorni e r il raggio in cm). Il broccolo è maturo quando il raggio delle rosette più grandi è compreso tra $4\ cm$ e $8\ cm$. Quanti giorni impiega a maturare?

Per trovare la soluzione devo risolvere la disequazione: $4 < 2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{\frac{1}{7}t} < 8$:

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{7}t} > 2 \cdot 10^4 \\ e^{\frac{1}{7}t} < 4 \cdot 10^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{7}t > \ln\ (2 \cdot 10^4) \\ \frac{1}{7}t < \ln\ (4 \cdot 10^4) \end{cases} \qquad 7\ \ln\ (2 \cdot 10^4) < t < 7\ \ln\ (4 \cdot 10^4)$$

Svolgendo i calcoli e approssimando, ottengo che la maturazione avviene **tra i 69 e i 74 giorni**.

6. Cinque moli di gas perfetto contenute in un recipiente subiscono un'espansione isoterma alla temperatura di 15°C.
   A. Il volume iniziale è di $3{,}5\ L$ e il lavoro termodinamico compiuto dal gas è di $4{,}0 \cdot 10^3\ J$. Calcola il volume finale, sapendo che il lavoro termodinamico in una trasformazione isoterma è $L = nRT \ln \frac{V_f}{V_o}$.
   B. Per quali valori del volume finale il lavoro compiuto sarebbe inferiore a $500\ J$?

$$n = 5\,mol \qquad T = 288\ K \qquad V_i = 3{,}5\ L \qquad L = 4{,}0 \cdot 10^3\ J \qquad V_f? \qquad L' = 500\ J \qquad V_f'?$$

A. Tramite la formula inversa, a partire da $L = nRT \ln \frac{V_f}{V_o}$, ottengo il volume finale:

$$\ln \frac{V_f}{V_o} = \frac{L}{nRT} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_f}{V_o} = e^{\frac{L}{nRT}} \quad \Rightarrow \quad V_f = V_o\, e^{\frac{L}{nRT}} = \mathbf{4{,}9\ L}$$

B. La seconda richiesta si traduce con la disequazione:

$$nRT \ln \frac{V_f'}{V_o} < L' \quad \Rightarrow \quad V_f' < V_o\, e^{\frac{L'}{nRT}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_f' < 3{,}6\ L}$$

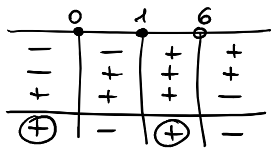
7. $$\begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{49^x}-7\right)(3^x-1)}{64-2^x} \geq 0 \\ \sqrt{1+4^x} > \dfrac{1}{\sqrt{4^x-1}} \end{cases}$$

Risolvo la prima disequazione, considerando i singoli fattori del numeratore e il denominatore, e facendo poi lo studio dei segni:

$N_1 \geq 0$: $(49^x)^{\frac{1}{2}} - 7 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 7^x \geq 7 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$

$N_2 \geq 0$: $3^x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3^x \geq 3^0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$

$D > 0$: $-2^x + 64 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2^x < 2^6 \quad \Rightarrow \quad x < 6$



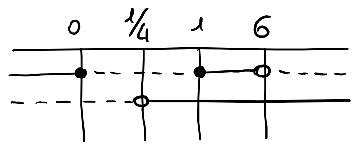
La soluzione della prima disequazione è: $x \leq 0 \quad \vee \quad 1 \leq x < 6$

Risolvo la seconda disequazione ricordando che il denominatore è sempre positivo nel dominio, perciò:

$$\begin{cases} \sqrt{4^{2x}-1} > 1 \\ 4^x - 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4^{2x}-1 > 1 \\ 4^x - 1 > 0 \end{cases} \qquad 4^{2x} > 2 \qquad 2^{4x} > 2^1 \qquad x > \frac{1}{4}$$

Mettendo a sistema i due risultati:

$$\begin{cases} x \leq 0 \quad \vee \quad 1 \leq x < 6 \\ x > \dfrac{1}{4} \end{cases}$$



$\boldsymbol{1 \leq x < 6}$

8. $$3^{x+1} - \frac{1}{3^x} - 2 = 0$$

Pongo $3^x = y$ e faccio il denominatore comune, senza bisogno di porre le condizioni di accettabilità, visto che $3^x \neq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$:

$$3y - \frac{1}{y} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y^2 - 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{1 \pm 2}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ y_2 = -\dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 3^x = -\dfrac{1}{3} \;\; \nexists x \in \mathbb{R} \end{array}$$

L'unica soluzione possibile è $\boldsymbol{x = 0}$.

9. $$25 \cdot 2^{6x} > 16 \cdot 5^{3x}$$

$$\frac{25 \cdot (2^2)^{3x}}{25 \cdot 5^{3x}} > \frac{16 \cdot 5^{3x}}{25 \cdot 5^{3x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{4^{3x}}{5^{3x}} > \frac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{3x} > \left(\frac{4}{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 3x < 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x < \frac{2}{3}}$$

10. $$\frac{|2x-1|}{3^x+1} \leq 0$$

Sia il numeratore che il denominatore sono positivi per qualsiasi valore reale di x, perciò l'unica possibilità è che la frazione sia nulla. Questo si verifica quando il numeratore è nullo, ovvero quando $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$.

11. $3 = \dfrac{14}{\log_5 x + 2} + \dfrac{4}{\log_5 x - 1}$

Pongo: $\log_5 \ x = y$

$$\frac{14}{y+2} + \frac{4}{y-1} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{14\,(y-1) + 4\,(y+2) - 3\,(y+2)(y-1)}{(y+2)(y-1)} = 0 \qquad C.A.: y \neq -2 \ \wedge \ y \neq 1$$

$$14y - 14 + 4y + 8 - 3y^2 - 3y + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y^2 - 15y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(y-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0 \ \ y_2 = 5$$

$$y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \log_5 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = 1} \ \ acc. \qquad\qquad y_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \log_5 \ x = 5 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_2 = 5^5} \ \ acc.$$

12. $\log_5 x + \log_5\left(x\sqrt{5} - 4\right) = \dfrac{1}{2}$

$$\log_5 \ \left(x\left(x\sqrt{5} - 4\right)\right) = \log_5 \ \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad x^2\sqrt{5} - 4x - \sqrt{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 3}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{x_1 = \sqrt{5}} \ \ acc. \\ x_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \ \ non\ acc. \end{array}$$

13. $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 4 \\ \log_2 x + \log_2 y = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 4 \\ \log_2 x + \log_2 y = 0 \end{cases} \\ \hline 2\log_2 x = 4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 y = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 4} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{1}{4}} \end{cases}$$

14. $\sqrt{4 - \log_2 x} > 3$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4 - \log_2 x \geq 0 \\ 4 - \log_2 x > 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x < -5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < \dfrac{1}{32} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{0 < x < \frac{1}{32}}$$

15. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{\log_2 x} > \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} \ (\log_2 x)^{\frac{1}{2}} > \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} \log_2 x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} \log_2 x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ \log_2 x < \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < \sqrt[3]{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{1 < x < \sqrt[3]{2}}$$