1. Un oggetto di massa $2{,}0\ kg$, che si muove con una velocità di componenti $v_x = v_y = 1{,}0\ m/s$, subisce l'azione di due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ di modulo $3{,}0\ N$, la prima rivolta lungo l'asse y e la seconda lungo l'asse x. Quanto tempo impiega l'oggetto a raggiungere una velocità di $29\ m/s$? Quale distanza avrà percorso fino a quell'istante?

$$\vec{v}_o = (1{,}0\ m/s)\ \hat{x} + (1{,}0\ m/s)\ \hat{y} \qquad \vec{F}_1 = (3{,}0\ N)\ \hat{y} \qquad \vec{F}_2 = (3{,}0\ N)\ \hat{x} \qquad v = 29\ m/s \qquad t? \qquad s?$$

Applico il secondo principio della dinamica, per determinare il vettore accelerazione:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m} = \frac{F_{2x}}{m}\ \hat{x} + \frac{F_{1y}}{m}\ \hat{y} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{F_{2x}}{m}\right)^2 + \left(\frac{F_{1y}}{m}\right)^2} = \frac{\sqrt{F_{2x}^2 + F_{1y}^2}}{m}$$

Usando le leggi del moto uniformemente accelerato, posso rispondere alle richieste del problema, ricordando che $v_o = \sqrt{v_{ox}^2 + v_{oy}^2}$:

$$v = v_o + at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v - v_o}{a} = m\frac{v - \sqrt{v_{ox}^2 + v_{oy}^2}}{\sqrt{F_{2x}^2 + F_{1y}^2}} = \mathbf{13\ s} \qquad\qquad s = \frac{v^2 - v_o^2}{2a} = \mathbf{2{,}0 \cdot 10^2\ m}$$

2. La Terra (di raggio $r_T = 6371\ km$) compie una rotazione completa in $24\ h$. Considera un oggetto di massa $50\ kg$ posto all'equatore. Calcola la forza centripeta che subisce l'oggetto e il suo rapporto con la forza-peso a cui è soggetto.

$$r_T = 6371\ km \qquad T = 24\ h \qquad m = 50\ kg \qquad F_c? \qquad \frac{F_c}{P}?$$

Determino la forza centripeta, usando la definizione di velocità tangenziale del moto circolare uniforme:

$$F_c = m\frac{v^2}{r_T} = m\left(\frac{2\pi r_T}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{r_T} = m r_T \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \mathbf{1{,}7\ N}$$

Determino il rapporto tra forza centripeta e forza peso:

$$\frac{F_c}{P} = \frac{m r_T \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}{mg} = \frac{r_T}{g}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \mathbf{3{,}4 \cdot 10^{-3}}$$

3. Il raggio di un moto circolare uniforme aumenta del 33%. Di quanto varia in percentuale la forza che produce se la velocità rimane invariata?

$$R_2 = \frac{133}{100}R_1 \qquad \frac{F_2 - F_1}{F_1}?$$

Uso la definizione di forza centripeta per risolvere il problema:

$$\frac{F_2 - F_1}{F_1} = \frac{F_2}{F_1} - 1 = \frac{m\frac{v^2}{R_2}}{m\frac{v^2}{R_1}} - 1 = \frac{R_1}{R_2} - 1 = \frac{R_1}{\frac{133}{100}R_1} - 1 = \frac{100}{133} - 1 = -\frac{33}{133} = \mathbf{-25\%}$$

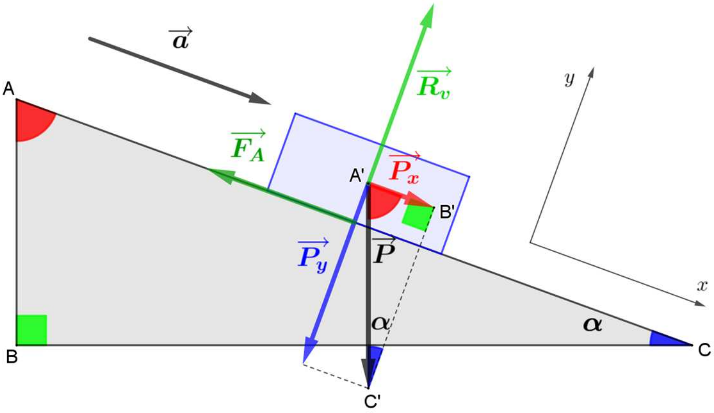
4. In un impianto di riciclaggio, i rifiuti giungono con una velocità di $0{,}50\ m/s$ alla sommità di un piano inclinato di $10°$, su cui scivolano per giungere su un nastro trasportatore orizzontale. I rifiuti devono giungere in fondo al piano inclinato con una velocità di $3{,}0\ m/s$ per riuscire a passare sul nastro trasportatore. Il coefficiente di attrito dinamico tra il piano inclinato e i rifiuti è $0{,}12$. Quanto deve essere lungo il piano inclinato?

$$v_o = 0{,}50\ m/s \qquad \alpha = 10° \qquad v = 3{,}0\ m/s \qquad \mu = 0{,}12 \qquad L?$$

Applico il secondo principio della dinamica lungo l'asse x:

$$P_x - F_A = ma$$

Determino P_x e F_A usando, innanzi tutto, la similitudine tra i triangoli ABC e $A'B'C'$. I due triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine, avendo due angoli congruenti: l'angolo retto in B e B' (l'angolo in B' è retto, in quanto le due direzioni scelte per scomporre la forza peso sono perpendicolari tra loro, essendo parallela e perpendicolare al piano stesso), l'angolo acuto in A e A' in quanto formati da semirette parallele ed equiverse. Da questo deduco che: $A'\widehat{B'}C' \cong \alpha$.



Perciò, ricordando che la forza d'attrito è data dal coefficiente d'attrito moltiplicato per la forza premente e che, in questo caso, la forza premente è la componente perpendicolare al piano della forza peso:

$$P_x = P\sin\alpha = mg\sin\alpha \qquad F_A = \mu F_\perp = \mu P_y = \mu P\cos\alpha = mg\mu\cos\alpha$$

Ricordando, dalle leggi del moto uniformemente accelerato, che l'accelerazione si può esprimere in funzione delle velocità e dello spazio percorso, che in questo caso coincide con la lunghezza del piano L:

$$a = \frac{v^2 - v_o^2}{2L} = \frac{v^2}{2L}$$

Sostituendo le grandezze determinate, posso calcolare la lunghezza L del piano:

$$mg\sin\alpha - mg\mu\cos\alpha = m\frac{v^2}{2L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{v^2}{2g\,(\sin\alpha - \pi\cos\alpha)} = \mathbf{8{,}0\ m}$$

5. Un oggetto di massa m, attaccato a una molla di costante elastica k ha un periodo di oscillazione T_1. Calcola il rapporto in percentuale tra il periodo quando la massa aumenta del 21% e il periodo iniziale.

$$k_1 = k_2 = k \qquad T_1 \qquad m_1 = m \qquad m_2 = \frac{121}{100}m \qquad \frac{T_2}{T_1}?$$

Quando la molla viene collocata su un piano orizzontale, la forza elastica agisce come una forza di richiamo dato che ha verso opposto allo spostamento. Applicando la legge di Hooke e il secondo principio della dinamica:

$$\begin{cases} \vec{F} = -k\vec{x} \\ \vec{F} = m\vec{a} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = -k\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{x}$$

Dato che l'accelerazione è direttamente proporzionale allo spostamento, ma di verso opposto, il corpo si muove di moto armonico. In un moto armonico, l'accelerazione è legata alla pulsazione dalla relazione: $\vec{a} = -\omega^2\vec{x}$, perciò:

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{k}{m} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Avendo determinato il legame tra il periodo della molla e la massa, posso determinare il rapporto richiesto:

$$\frac{T_2}{T_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{121}{100}} = \frac{11}{10} = \mathbf{110\%}$$