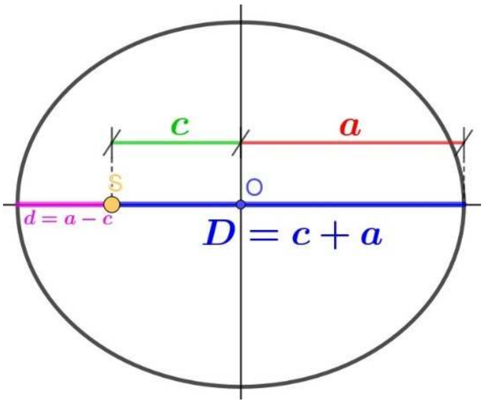
1. L'orbita della Terra ha semiasse maggiore di lunghezza $1{,}50 \cdot 10^{11}\ m$ ed eccentricità $0{,}0167$. Di quanto differisce la distanza massima tra la Terra e il Sole da quella minima?

$$a = 1{,}50 \cdot 10^{11}\ m \qquad e = 0{,}0167 \qquad D - d?$$



Nell'immagine a lato è rappresentata un'ellisse con centro in O, semidistanza focale c e semiasse maggiore a. La distanza massima tra la Terra e il Sole è indicata con D, quella minima con d e posso ricavare:

$$D - d = c + a - (a - c) = c + a - a + c = 2c$$

Secondo la definizione, l'eccentricità è data dal rapporto tra la semidistanza focale e il semiasse maggiore:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = ea$$

Ora posso determinare la distanza richiesta:

$$D - d = 2ae = \mathbf{5{,}01 \cdot 10^9\ m}$$

2. Due satelliti descrivono orbite approssimativamente circolari attorno alla Terra. Per completare una rivoluzione, il satellite A impiega un tempo triplo rispetto al satellite B. Calcola il rapporto fra i raggi delle orbite del satellite A e del satellite B.

$$T_A = 3T_B \qquad r_A/r_B?$$

Per la terza legge di Keplero:

$$\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_A}{r_B} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{3T_B}{T_B}\right)^2} = \sqrt[3]{9} = \mathbf{2{,}1}$$

3. Il pianeta Giove ha una massa 318 volte superiore alla massa della Terra e un raggio che è $11{,}0$ volte maggiore del raggio della Terra. Qual è il rapporto tra l'accelerazione di gravità sulla superficie di Giove e l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra?

$$M_G = 318\ M_T \qquad R_G = 11{,}0\ R_T \qquad g_G/g_T?$$

Considero una qualsiasi massa m e la sua attrazione verso i due pianeti, ovvero il suo peso, facendone direttamente il rapporto:

$$\frac{g_G}{g_T} = \frac{P_G}{P_T} = \frac{G\frac{mM_G}{R_G^2}}{G\frac{mM_T}{R_T^2}} = \frac{M_G}{R_G^2} \cdot \frac{R_T^2}{M_T} = \frac{318\ M_T}{(11{,}0\ R_T)^2} \cdot \frac{R_T^2}{M_T} = \frac{318}{(11{,}0)^2} = \mathbf{2{,}63}$$

4. Nel 2017 è stato scoperto l'esopianeta Gliese 273 c (cioè un pianeta posto al di fuori del Sistema Solare) che orbita attorno alla stella di Lyuten, nella costellazione del Cane Minore. Il suo "anno" dura $4{,}72$ giorni e il semiasse maggiore della sua orbita vale $5{,}45$ milioni di chilometri. Considera circolare l'orbita di Gliese 273 c e stima la massa della stella di Lyuten.

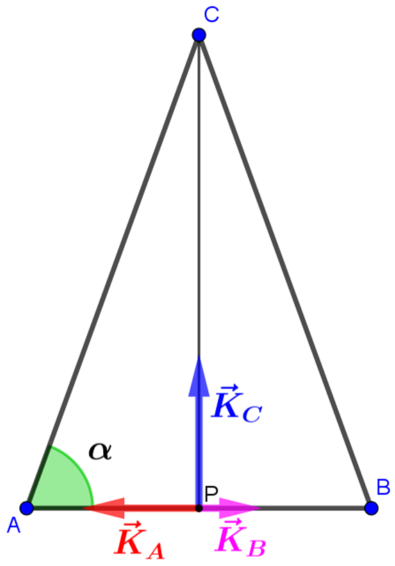
$$T = 4{,}72\ giorni \qquad a = 5{,}45 \cdot 10^6\ km \qquad M?$$

Partendo dal fatto che la forza centripeta, che vincola Gliese 273 c a orbitare attorno a Lyuten, è uguale alla forza di attrazione gravitazionale data dalla legge di gravitazione universale, posso determinare, mediante la formula inversa, la massa di Lyuten, ricordando che la velocità tangenziale del pianeta è data da: $v = \frac{2\pi a}{T}$, dove a è il semiasse maggiore e T il periodo:

$$F_c = F_G \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{a} = G\frac{mM}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 = G\frac{M}{a} \quad \Rightarrow \quad M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{a^3}{G} = \mathbf{5{,}76 \cdot 10^{29}\ kg}$$

5. Tre meteoroidi sono disposti nei vertici di un triangolo isoscele ABC di base AB e hanno masse rispettivamente $m_A = 8{,}30 \cdot 10^4\ kg$, $m_B = 4{,}20 \cdot 10^4\ kg$ e $m_C = 2{,}10 \cdot 10^5\ kg$. La distanza tra il meteoroide A e quello C è di $372\ km$ e l'angolo al vertice misura $40°$. Determina il vettore campo gravitazionale nel punto P, punto medio tra A e B, e il suo modulo.

$$m_A = 8{,}30 \cdot 10^4\ kg \qquad m_B = 4{,}20 \cdot 10^4\ kg \qquad m_C = 2{,}10 \cdot 10^5\ kg \qquad d = \overline{AC} = 372\ km \qquad B\hat{C}A = 40° \qquad \overline{AP} = \overline{PB} \qquad \vec{K}?\ K?$$



Come si può notare dalla figura a lato, i vettori campo gravitazionale generati da A e da B hanno direzione AB, ma verso opposto, mentre il vettore generato da C ha direzione PC ed è rivolto verso C. Le due direzioni sono perpendicolari, perché, trattandosi di un triangolo isoscele di base AB, CP è mediana relativa alla base e quindi anche altezza. Posso procedere a determinare il vettore campo gravitazionale agente in P, indicando le varie distanze come segue:

$$\overline{AP} = \overline{PB} = L = d\cos\alpha \qquad \overline{CP} = h = d\sin\alpha$$

Identificando l'asse x con la direzione AB e rivolto verso B e l'asse y con la direzione PC e rivolto verso C, il vettore campo gravitazionale diventa:

$$\vec{K} = \left(-G\frac{m_A}{L^2} + G\frac{m_B}{L^2}\right)\hat{x} + G\frac{m_C}{h^2}\hat{y} =$$

$$= \mathbf{(-1,69 \cdot 10^{-16}\ m/s^2)\ \hat{x} + (1,15 \cdot 10^{-16}\ m/s^2)\ \hat{y}}$$

A questo punto, posso determinare il modulo del vettore:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \mathbf{2,04 \cdot 10^{-16}\ m/s^2}$$

6. Considera un sistema di tre masse vincolate ferme in tre vertici di un quadrato ABCD, $m_A = 5{,}0\ kg$, $m_B = 8{,}0\ kg$ e $m_C = 12{,}0\ kg$. Sapendo che l'energia totale del sistema è $-7{,}9 \cdot 10^{-8}\ J$, determina la misura del lato del quadrato.

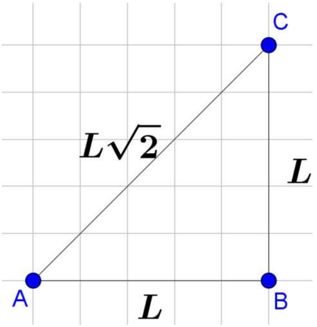
$$m_A = 5{,}0\ kg \qquad m_B = 8{,}0\ kg \qquad m_C = 12{,}0\ kg \qquad U = -7{,}9 \cdot 10^{-8}\ J \qquad L?$$

Ricordo innanzi tutto la definizione di energia potenziale gravitazionale tra due cariche: $U = -G\frac{m_1 m_2}{R}$.
Nel caso di un sistema di cariche, bisogna sommare le diverse energie potenziali gravitazionali, considerando le cariche due a due:

$$U = -G\frac{m_A m_B}{L} - G\frac{m_A m_C}{L\sqrt{2}} - G\frac{m_B m_C}{L} = -\frac{G}{L}\left(m_A m_B + \frac{m_A m_C}{\sqrt{2}} + m_B m_C\right)$$

Da questa formula, posso ricavare la lunghezza del lato del quadrato:

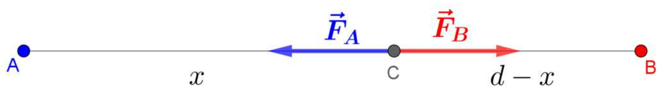
$$L = -\frac{G}{U}\left(m_A m_B + \frac{m_A m_C}{\sqrt{2}} + m_B m_C\right) = \mathbf{0,15\ m}$$



7. Due masse di $800\ kg$ e $600\ kg$ sono poste a una distanza di $0{,}25\ m$. In quale punto del segmento che li congiunge si potrà inserire una massa di $400\ kg$ perché la forza totale agente su di essa sia uguale a zero?

$$m_A = 800\ kg \qquad m_B = 600\ kg \qquad d = 0{,}25\ m \qquad F_C = 0\ N \qquad x?$$

Come si può evincere dall'immagine a lato, perché la forza totale agente sulla carica in C sia nulla, la forza determinata dalla presenza della carica in A deve essere uguale in modulo alla forza determinata dalla carica presente in B, perciò:



$$F_A = F_B \quad \Rightarrow \quad G\frac{m_C m_A}{x^2} = G\frac{m_C m_B}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d-x}{x}\right)^2 = \frac{m_B}{m_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{d-x}{x} = \sqrt{\frac{m_B}{m_A}}$$

$$\frac{d}{x} - 1 = \sqrt{\frac{m_B}{m_A}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{x} = 1 + \sqrt{\frac{m_B}{m_A}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{m_B}{m_A}}} = \mathbf{0,13\ m}$$