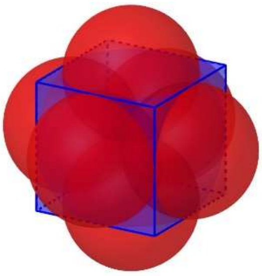
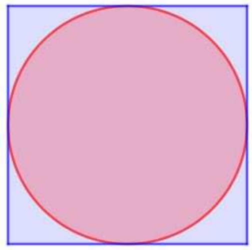
1. Sulle sei facce di un cubo con spigolo di 8 cm sono posizionate altrettante semisfere di diametro congruente allo spigolo del cubo. Calcola l'area della superficie totale.



Consideriamo una singola faccia: dall'area del quadrato, come vediamo a destra, dobbiamo sottrarre l'area della circonferenza che ha centro nel centro del quadrato e raggio uguale a metà lato; a questo risultato dobbiamo aggiungere, per ogni faccia, l'area della semisfera con centro nel centro del quadrato e diametro uguale al suo lato, come vediamo nella figura a sinistra. Procediamo con il calcolo indicando con $2r$ il lato del cubo:



$$S_1 = 4r^2 - \pi r^2 + \frac{4\pi r^2}{2} = (4+\pi)\, r^2$$

Questa è l'area di una singola faccia: dobbiamo moltiplicare il risultato per 6 (ovvero per il numero delle facce) e sostituire a r il valore $4\ cm$ dato dal testo:

$$S = 6S_1 = \mathbf{96\ (4+\pi)\ cm^2}$$

2. Un prisma esagonale regolare ha l'altezza di $9\sqrt{3}\ cm$. Quanto è lungo lo spigolo di base, sapendo che l'area della superficie totale è $840\sqrt{3}\ cm^2$?

La superficie del prisma si calcola sommando all'area laterale le due aree di base. Indicando con x lo spigolo di base e considerando che l'esagono regolare è costituito da sei triangoli equilateri di lato x, l'area di base è data da:

$$A_b = 6 \cdot \frac{1}{2} x^2 \sin 60° = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, x^2$$

L'area laterale invece è data dal prodotto del perimetro di base, $6x$, per l'altezza (data dal testo). Perciò:

$$3\sqrt{3}\, x^2 + 6x \cdot 9\sqrt{3} = 840\sqrt{3} \qquad x^2 + 18x - 280 = 0 \qquad x_{1,2} = -9 \pm \sqrt{361} = \left\langle \begin{array}{l} 10 \\ -28 \end{array} \right.$$

Dobbiamo considerare solo la soluzione positiva, perciò lo spigolo di base del prisma dato misura $\mathbf{10\ cm}$.

3. Calcola il volume della piramide che ha per vertici l'origine e le intersezioni del piano $2x - 2y + 3z + 6 = 0$ con gli assi.

Determiniamo le coordinate dei punti di intersezione del piano con gli assi cartesiani:

$$asse\ x: \begin{cases} 2x - 2y + 3z + 6 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad A\ (-3; 0; 0)$$

$$asse\ y: \begin{cases} 2x - 2y + 3z + 6 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad B\ (0; 3; 0)$$

$$asse\ z: \begin{cases} 2x - 2y + 3z + 6 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad C\ (0; 0; -2)$$

Possiamo considerare come base della piramide la faccia appoggiata sul piano Oxy: la base è un triangolo rettangolo isoscele e l'altezza della piramide è data dalla coordinata z del punto C, perciò:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{3}$$

4. Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai punti $P(1; 4; 0)$ e $Q(2; -1; -1)$.

Consideriamo il generico punto P di coordinate $A\ (x; y; z)$ e poniamo $\overline{AP} = \overline{AQ}$, determinando così l'equazione del luogo geometrico:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2}$$

$$-2x + 1 - 8y + 16 = -4x + 4 + 2y + 1 + 2z + 1 \qquad \mathbf{2x - 10y - 2z + 11 = 0}$$

5. Verifica che la retta $r: \begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3z - 4 = 0 \end{cases}$ e il piano $\alpha: x - y - z + 8 = 0$ non hanno punti di intersezione e calcola la distanza della retta dal piano.

Trovo l'equazione in forma parametrica della retta, sostituendo alla z il parametro k:

$$\begin{cases} x = 4 - 3k \\ 3y = 16 - 12k - 1 \\ z = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 - 3k \\ y = 5 - 4k \\ z = k \end{cases}$$

La retta ha vettore direzione $\vec{v}\,(3; 4; -1)$, mentre il piano ha vettore normale $\vec{n}\,(1; -1; -1)$. Siccome $\vec{v} \perp \vec{n}$ (è infatti rispettata la condizione di perpendicolarità tra i due vettori: $3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = 3 - 4 + 1 = 0$), allora il piano e la retta sono paralleli. Resta da scegliere un punto della retta e calcolarne la sua distanza dal piano. Scegliamo il punto $A\,(4; 5; 0)$, che si ottiene ponendo il parametro uguale a zero, e abbiamo:

$$d(A;\ \alpha) = \frac{|4 - 5 - 0 + 8|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{7}{3}\sqrt{3}}$$

6. Scrivi l'equazione della superficie sferica passante per il punto di intersezione tra la retta $r: \begin{cases} x + 3y - z - 3 = 0 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi: x + 4y - 2z - 3 = 0$ e avente centro nel punto $C(4; 3; -2)$.

Calcoliamo le coordinate del punto di intersezione tra la retta e il piano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + 3y - z - 3 = 0 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + 4y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 5 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0 \\ x + 4y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

(Ho moltiplicato la seconda equazione per 2 e l'ho sommata alla terza equazione ottenendo la x. Ho poi sommato tra loro la prima e la seconda equazione, ottenendo un'equazione in x e y, dalla quale è stato possibile ricavare il valore di y. A questo punto ho sostituito le due coordinate così ottenute nella terza equazione). Il punto di intersezione ha coordinate $A\,(1; 1; 1)$.
La sfera è il luogo geometrico dei punti dello spazio che si trovano a distanza costante dal centro C e in questa situazione la distanza costante è data dal segmento $\overline{AC}$:

$$\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (1 - 3)^2 + (1 + 2)^2}$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 7 = 0}$$

7. Determina l'equazione della superficie sferica passante per $A(2; 0; 1)$ e tangente al piano di equazione $x = 5z - 18$ nel punto $T(-2; -1; -4)$.

Determino innanzi tutto l'equazione della retta perpendicolare al piano e passante per il punto T, sapendo che tale retta deve avere per vettore direzione il vettore normale al piano, ovvero $\vec{n}\,(1; 0; -5)$:

$$\begin{cases} x = -2 + k \\ y = -1 \\ z = -4 - 5k \end{cases}$$

Sapendo che il centro C della sfera appartiene alla retta appena determinata, ovvero ha generiche coordinate $C\,(k - 2; -1; -4 - 5k)$ e che $\overline{CA} = \overline{CT}$, visto che sia A che T appartengono alla sfera, otteniamo l'equazione:

$$\sqrt{(k - 2 - 2)^2 + (-1 - 0)^2 + (-4 - 5k - 1)^2} = \sqrt{(k - 2 + 2)^2 + (-1 + 1)^2 + (-4 - 5k + 4)^2}$$

$$k^2 - 8k + 16 + 1 + 25k^2 + 25 + 50k = k^2 + 0 + 25k^2$$

$$42\,k + 42 = 0 \qquad k = -1$$

Il centro della sfera ha coordinate $C(-3; -1; 1)$ e sapendo che la sfera è il luogo geometrico dei punti dello spazio che si trovano a distanza costante dal centro C (in questa situazione la distanza costante può essere data dal segmento $\overline{AC}$):

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2} = \sqrt{(2 + 3)^2 + (0 + 1)^2 + (1 - 1)^2}$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 2z - 15 = 0}$$