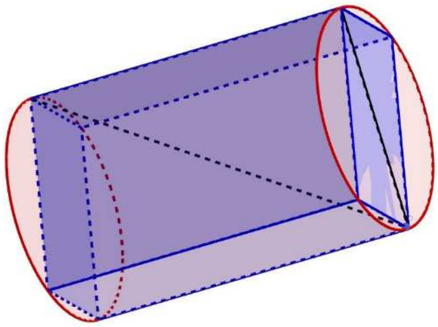
1. Calcola la lunghezza della diagonale di un parallelepipedo rettangolo inscritto in un cilindro di altezza 15 cm e con raggio di base di 3 cm.

Come si può notare dall'immagine a fianco, è semplice determinare la lunghezza della diagonale: si tratta di applicare il teorema di Pitagora, usando come dimensioni il diametro di base del cilindro e la sua altezza:

$$d = \sqrt{15^2 + 6^2}\ cm = \mathbf{3\sqrt{29}\ cm}$$



2. Un cono equilatero ha volume di $243\sqrt{3}\ \pi\ cm^3$. Calcola il volume di un cubo avente spigolo di base congruente a un terzo del diametro di base del cono.

Un cono equilatero è un cono con l'apotema congruente al diametro di base, perciò l'altezza del cono – applicando il teorema di Pitagora e considerando il triangolo rettangolo con cateto il raggio di base (indicato con x) e ipotenusa l'apotema (in quanto pari al diametro di base, ovvero doppio del raggio, indicata con $2x$) – sarà data da:

$$h = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$$

Poniamo quindi il volume uguale al dato fornito dal testo per determinare il raggio di base:

$$\frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot x\sqrt{3} = 243\pi\sqrt{3} \qquad x^3 = 243 \cdot 3 \qquad x^3 = 3^6 \qquad x = 9$$

Il raggio di base misura 9 cm, perciò lo spigolo del cubo, essendo un terzo del diametro di base del cono, è pari a $6\ cm$. Possiamo quindi determinare il volume del cubo, pari a $\mathbf{216\ cm^3}$.

3. Individua il piano α tra i piani del tipo $(a+b)\,x + (b-a)\,y + az + 2a + b = 0$ che sia perpendicolare al piano passante per i punti $A(1;1;1)$, $B(3;0;0)$, $C(0;0;2)$.

Innanzi tutto, determino i parametri direttori della normale al piano passante per i punti A, B e C, imponendo il passaggio del piano per i punti dati, ovvero sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione generica del piano $ax + by + cz + d = 0$:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 3a + d = 0 \\ 2c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = -3a \\ c = \frac{3}{2}a \\ b = \frac{1}{2}a \end{cases} \qquad (2;1;3)$$

Il piano α ha come parametri direttori della normale $(a+b; b-a; a)$ perciò poniamo la condizione di perpendicolarità con il vettore normale appena determinato:

$$2(a+b) + b - a + 3a = 0 \qquad 4a + 3b = 0 \qquad b = -\frac{4}{3}a$$

Possiamo ora determinare l'equazione del piano richiesta:

$$-\frac{1}{3}ax - \frac{7}{3}ay + az + \frac{2}{3}a = 0 \qquad \mathbf{x + 7y - 3z - 2 = 0}$$

4. Scrivi le equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P(1; -1; 1)$ e parallela alla retta data dall'intersezione dei piani $\alpha: 2x + y - 3z - 3 = 0$ e $\beta: x + 5z = 1$.

Cominciamo con il determinare l'equazione parametrica della retta, ponendo $z = k$ nelle equazioni dei piani:

$$\begin{cases} 2x + y - 3k - 3 = 0 \\ x + 5k = 1 \\ z = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - 5k \\ y = 1 + 13\,k \\ z = k \end{cases}$$

La retta data ha parametri direttori $(-5; 13; 1)$ e quindi possiamo determinare le equazioni cartesiane della retta ad essa parallela e passante per il punto P:

$$\mathbf{\frac{1-x}{5} = \frac{y+1}{13} = z - 1}$$

5. Trova l'equazione della superficie sferica passante per i punti $A(0;5;0)$ e $B\left(1;2;\sqrt{2}\right)$, sapendo che il suo centro appartiene all'asse y.

Visto che il centro appartiene all'asse y, ha generiche coordinate: $C\ (0;b;0)$. Visto che è il centro della superficie sferica, ha uguale distanza dai due punti dati:

$$\overline{CA}=\overline{CB} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{0^2+(5-b)^2+0^2}=\sqrt{1^2+(2-b)^2+\sqrt{2}^2} \quad \Rightarrow \quad b=3$$

Conoscendo il centro della sfera, possiamo determinarne il raggio:

$$r=\overline{CA}=|5-3|=2$$

Possiamo determinare l'equazione della sfera, come luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso:

$$(x-0)^2+(y-3)^2+(z-0)^2=2^2 \qquad \boldsymbol{x^2+y^2+z^2-6y+5=0}$$

6. Trova le coordinate del punto di tangenza fra il piano di equazione $2x-4y+3z=45$ e una superficie sferica di centro $P(-2;3;1)$.

Siccome il raggio passante per il punto di tangenza è perpendicolare al piano tangente alla sfera, determiniamo l'equazione della retta perpendicolare al piano, passante per il punto P, sapendo che i suoi parametri direttori coincidono con quelli della normale al piano, ovvero $(2;\ -4;3)$:

$$\begin{cases} x=-2+2k \\ y=3-4k \\ z=1+3k \end{cases}$$

Determiniamo quindi le intersezioni di questa retta con il piano dato:

$$2\,(-2+2k)-4\,(3-4k)+3\,(1+3k)=45 \qquad k=2$$

Perciò il punto di tangenza, sostituendo il valore del parametro nell'equazione parametrica della retta, è: $\boldsymbol{(2;\ -5;7)}$.

7. Dati i punti $A(2;1;\ -1)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;\ -3)$ e $D(1;2;\ -2)$, calcola l'altezza del tetraedro ABCD di vertice D.

Per determinare l'altezza del tetraedro, è sufficiente determinare l'equazione del piano passante per i punti A, B e C e poi calcolare la distanza del punto D dal piano individuato:

$$\begin{cases} 2a+b-c+d=0 \\ 3b+d=0 \\ -3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=3c \\ b=-c \\ a=-\dfrac{1}{2}c \end{cases} \qquad \alpha: x+2y-2z-6=0$$

$$h=d(D;\ \alpha)=\frac{|1+4+4-6|}{\sqrt{1+4+4}}=\boldsymbol{1}$$