1. $\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-3}\right):\frac{1-x^2}{x^2-5x+6}$ $\qquad C.E.: x \neq \pm 1 \ \wedge x \neq 2 \ \wedge x \neq 3$

$$=\frac{x-3-2(x-2)}{(x-2)(x-3)}:\frac{1-x^2}{x^2-5x+6}=\frac{x-3-2x+4}{(x-2)(x-3)}:\frac{1-x^2}{x^2-5x+6}=$$

$$=\frac{-x+1}{(x-2)(x-3)}\cdot\frac{x^2-5x+6}{1-x^2}=\frac{1-x}{(x-2)(x-3)}\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-x)(1+x)}=\mathbf{\frac{1}{1+x}}$$

2. $\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}\cdot\frac{2x^3-4x^2+8x}{x^3+8}$ $\qquad C.E.: x \neq -2$

$$=\frac{(x+2)^3}{(x+2)^2}\cdot\frac{2x(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\mathbf{2x}$$

3. $\frac{2}{x^2-x-2}+\frac{3}{x^2-3x+2}-\frac{5x+1}{x^3-2x^2-x+2}$ $\qquad C.E.: x \neq \pm 1 \ \wedge x \neq 2$

$$=\frac{2}{(x-2)(x+1)}+\frac{3}{(x-2)(x-1)}-\frac{5x+1}{x^2(x-2)-1(x-2)}=\frac{2}{(x-2)(x+1)}+\frac{3}{(x-2)(x-1)}-\frac{5x+1}{(x-2)(x^2-1)}=$$

$$=\frac{2}{(x-2)(x+1)}+\frac{3}{(x-2)(x-1)}-\frac{5x+1}{(x-2)(x-1)(x+1)}=\frac{2(x-1)+3(x+1)-(5x+1)}{(x-2)(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{2x-2+3x+3-5x-1}{(x-2)(x+1)(x-1)}=\mathbf{0}$$

4. $\left[\left(\frac{x^2-6x+9}{x-3}+5\right)^{-1}+\frac{1}{x^2-4}\right]^2\cdot\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+1}$ $\qquad C.E.: x \neq 1 \ \wedge x \neq 3 \ \wedge x \neq \pm 2$

$$=\left[\left(\frac{(x-3)^2}{x-3}+5\right)^{-1}+\frac{1}{x^2-4}\right]^2\cdot\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}=\left[(x-3+5)^{-1}+\frac{1}{x^2-4}\right]^2\cdot\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\left[(x+2)^{-1}+\frac{1}{x^2-4}\right]^2\cdot\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x-2)(x+2)}\right]^2\cdot\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}=\left[\frac{x-2+1}{(x-2)(x+2)}\right]^2\cdot\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\left[\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}\right]^2\cdot\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2(x-2)^2}\cdot\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}=\mathbf{\frac{1}{(x+2)^2}}$$

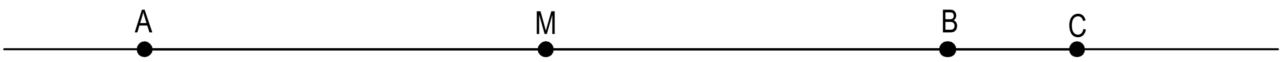
5. $\left(\frac{x+2}{2-x}-\frac{x}{2x-4}\right)^2\cdot\frac{4x+12}{9x^2+24x+16}+\frac{x^2-5x+1}{4-4x+x^2}$ $\qquad C.E.: x\neq 2\ \wedge x\neq -\frac{4}{3}$

$$=\left(\frac{x+2}{2-x}+\frac{x}{2(2-x)}\right)^2\cdot\frac{4(x+3)}{(3x+4)^2}+\frac{x^2-5x+1}{(2-x)^2}=\left(\frac{2x+4+x}{2(2-x)}\right)^2\cdot\frac{4(x+3)}{(3x+4)^2}+\frac{x^2-5x+1}{(2-x)^2}=$$

$$=\frac{(3x+4)^2}{4\,(2-x)^2}\cdot\frac{4(x+3)}{(3x+4)^2}+\frac{x^2-5x+1}{(2-x)^2}=\frac{x+3}{(2-x)^2}+\frac{x^2-5x+1}{(2-x)^2}=\frac{x+3+x^2-5x+1}{(2-x)^2}=$$

$$=\frac{x^2-4x+4}{(2-x)^2}=\frac{(2-x)^2}{(2-x)^2}=\mathbf{1}$$

6. Dimostra che la distanza del punto medio di un segmento da un qualunque punto esterno al segmento, ma appartenente alla retta su cui giace il segmento, è congruente alla semisomma delle distanze di questo punto dagli estremi del segmento.



Consideriamo la situazione in cui C, il punto esterno al segmento, segue B rispetto ad A. Analoga dimostrazione dovremmo effettuare per il caso in cui C preceda A, rispetto a B.

Ipotesi: $M\in\overline{AB}$

$\overline{AM}\cong\overline{MB}$

$A, M, B, C\ allineati$

Tesi: $\overline{MC}\cong\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{2}$

$$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AM}+\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{BC}\cong\overline{MB}+\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{BC}=$$

La congruenza $\overline{AM}\cong\overline{MB}$ vale per ipotesi

$$=2(\overline{MB}+\overline{BC})=2\,\overline{MC}$$

Dividendo entrambi i membri per 2, ottengo la tesi.

C.V.D.