10. Determina l'equazione dell'ellisse passante per P (2; 2) e Q (-1; 3).

Impongo il passaggio dell'ellisse per P e Q, sostituendo le coordinate dei due punti a x e y nell'equazione dell'ellisse:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1 \\ \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\left(-\dfrac{9}{b^2} + 1\right) + \dfrac{4}{b^2} = 1 \\ \dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{9}{b^2} + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{36}{b^2} + 4 + \dfrac{4}{b^2} = 1 \\ \dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{9}{b^2} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{32}{b^2} = -3 \\ \dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{9}{b^2} + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = \dfrac{32}{3} \\ \dfrac{1}{a^2} = -9 \cdot \dfrac{3}{32} + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = \dfrac{32}{3} \\ a^2 = \dfrac{32}{5} \end{cases}$$

$$5\,x^2 + 3\,y^2 = 32$$

11. Nell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, determina *b* in modo che risulti tangente alla retta $y = -\dfrac{3}{4}x + 3$.

Metto a sistema l'equazione dell'ellisse con l'equazione della retta e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = -\dfrac{3}{4}x + 3 \end{cases} \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{\dfrac{9}{16}x^2 + 9 - \dfrac{9}{2}x}{b^2} = 1$$

$$4b^2x^2 + 9x^2 + 144 - 72x - 16b^2 = 0 \qquad (4b^2 + 9)\,x^2 - 72x + 16\,(9 - b^2) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36^2 - 16\,(9 - b^2)\,(4b^2 + 9) = 0$$

$$81 - (36\,b^2 + 81 - 4b^4 - 9\,b^2) = 0 \qquad 81 - 36\,b^2 - 81 + 4b^4 + 9\,b^2 = 0$$

$$4b^4 - 27\,b^2 = 0 \qquad b^2\,(4b^2 - 27) = 0 \qquad b^2 = \frac{27}{4}$$

$$b = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

12. Un'ellisse passa per i punti A (-1; 5) e B (3; 4). Calcola l'equazione dell'ellisse e l'equazione della tangente all'ellisse passante per A.

Nella generica equazione dell'ellisse sostituisco a x e y le coordinate dei punti A e B e metto a sistema, in modo da determinare a e b:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{25}{b^2}=1 \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{25}{b^2}+1 \\ 9\left(-\dfrac{25}{b^2}+1\right)+\dfrac{16}{b^2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{25}{b^2}+1 \\ -\dfrac{225}{b^2}+9+\dfrac{16}{b^2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{25}{b^2}+1 \\ -\dfrac{209}{b^2}=-8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{25}{b^2}+1 \\ b^2=\dfrac{209}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{200}{209}+1 \\ b^2=\dfrac{209}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=\dfrac{9}{209} \\ b^2=\dfrac{209}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2=\dfrac{209}{9} \\ b^2=\dfrac{209}{8} \end{cases} \qquad \boxed{9x^2+8y^2=209}$$

Per determinare la tangente all'ellisse passante per A, applico la regola dello sdoppiamento:

$$\boxed{-9x+40y=209}$$

13. Data l'ellisse di equazione $4x^2+25y^2=100$, dopo averla rappresentata graficamente, determina *k* in modo che la retta $y=kx+6$ sia tangente all'ellisse.

Metto a sistema l'equazione dell'ellisse con l'equazione della retta e pongo $\Delta=0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} 4x^2+25y^2=100 \\ y=kx+6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2+25(k^2x^2+12kx+36)=100 \\ y=kx+6 \end{cases}$$

$$4x^2+25k^2x^2+300kx+900=100$$

$$(4+25k^2)x^2+300kx+800=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=150^2k^2-800(4+25k^2)=0 \qquad 15^2k^2-8(4+25k^2)=0$$

$$225k^2-32-200k^2=0 \qquad 25k^2-32=0$$

$$k^2=\frac{32}{25} \qquad \boxed{k=\pm\frac{4}{5}\sqrt{2}}$$

14. Scrivi l'equazione dell'ellisse passante per il punto A (1;3) e avente il semiasse maggiore (sull'asse y) uguale a 2 r3. Determina inoltre l'equazione della tangente nel punto B (1; -3).

Il fatto che il semiasse maggiore sia sull'asse y implica che: $b = 2\sqrt{3}$

Sostituisco le coordinate di A a x e y nell'equazione canonica dell'ellisse: $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$.

Metto a sistema le due condizioni per determinare l'equazione dell'ellisse:

$$\begin{cases} b = 2\sqrt{3} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2\sqrt{3} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{12} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2\sqrt{3} \\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1}$$

Verifico se il punto B appartiene all'ellisse, sostituendo le coordinate x e y nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{12} = 1 \quad \Rightarrow \quad B \in \text{ ellisse}$$

Determino l'equazione della tangente all'ellisse, applicando la regola dello sdoppiamento:

$$\frac{x}{4} - \frac{3y}{12} = 1 \qquad \boxed{x - y = 4}$$

15. Determinare le equazioni delle rette passanti per il punto (1; 2) e tangenti all'ellisse $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

Testo: L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas

Metto a sistema il fascio di rette centrato in (1; 2) con l'equazione dell'ellisse e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y - 2 = m(x-1) \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + m(x-1) \\ x^2 + 4(2 + m(x-1))^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Procedo con la seconda equazioni, ovvero la risolvente:

$$x^2 + 4(4 + m^2(x^2 - 2x + 1) + 4m(x-1)) - 4 = 0$$

$$x^2 + 16 + 4m^2x^2 - 8xm^2 + 4m^2 + 16mx - 16m - 4 = 0$$

Equazione della risolvente: $x^2(1 + 4m^2) + 2x(-4m^2 + 8m) + 4m^2 - 16m + 12 = 0$

Da cui ottengo il $\Delta = 0$: $\frac{\Delta}{4} = (-4m^2 + 8m)^2 - (1 + 4m^2)(4m^2 - 16m + 12) = 0$, che diventa:

$$4(-2m^2 + 4m)^2 - 4(1 + 4m^2)(m^2 - 4m + 3) = 0$$

$$4m^4 + 16m^2 - 16m^3 - (m^2 - 4m + 3 + 4m^4 - 16m^3 + 12m^2) = 0$$

$$4m^4 + 16m^2 - 16m^3 - m^2 + 4m - 3 - 4m^4 + 16m^3 - 12m^2 = 0$$

$3m^2 + 4m - 3 = 0$, che dà soluzione: $m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$.

Perciò le equazioni delle rette sono: $\boxed{y = 2 - \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}(x-1)}$