16. Data l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$, scrivi le equazioni delle tangenti:
   a. uscenti dal punto P (3; 0)
   b. uscenti dal punto Q (2; 2)
   c. uscenti dal punto $T\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

a. Verifico se il punto P appartiene all'ellisse, sostituendo le coordinate del punto all'ellisse: $3^2 + 0 \neq 4$. Perciò considero la generica retta passante per P, metto a sistema questa equazione con quella dell'ellisse e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y = m(x-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4m^2(x-3)^2 = 4 \\ y = m(x-3) \end{cases} \qquad x^2 + 4m^2x^2 - 24m^2x + 36m^2 = 4$$

$$x^2(1+4m^2) - 24m^2x + 36m^2 - 4 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 144\,m^4 - (1+4m^2)(36m^2 - 4) = 0$$

$$36\,m^4 - (1+4m^2)(9m^2 - 1) = 0 \qquad 36\,m^4 - 9m^2 + 1 - 36m^4 + 4m^2 = 0$$

$$5m^2 = 1 \qquad m = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \qquad y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}(x-3)$$

b. Verifico se il punto Q appartiene all'ellisse, sostituendo le coordinate del punto all'ellisse: $4^2 + 4 \cdot 4^2 \neq 4$. Perciò considero la generica retta passante per Q, metto a sistema questa equazione con quella dell'ellisse e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y - 2 = m(x-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4[m(x-2)+2] = 4 \\ y = m(x-2)+2 \end{cases}$$

$$x^2 + 4[m^2x^2 + 4m^2 + 4 - 4m^2x + 4mx - 8m] = 4$$

$$x^2 + 4m^2x^2 + 16m^2 + 16 - 16m^2x + 16mx - 32m = 4$$

$$x^2(1+4m^2) + 16\,x(m - m^2) + 16m^2 - 32m + 12 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 64(m-m^2)^2 - (1+4m^2)\,4\,(4m^2 - 8m + 3) = 0$$

$$16(m^2 - 2m^3 + m^4) - (4m^2 - 8m + 3 + 16m^4 - 32m^3 + 12m^2) = 0$$

$$16\,m^2 - 32m^3 + 16\,m^4 - 4m^2 + 8m - 3 - 16m^4 + 32m^3 - 12m^2 = 0$$

$$8m = 3 \qquad m = \frac{3}{8} \qquad y = \frac{3}{8}(x-2) + 2 \qquad 3x - 8y + 10 = 0$$

Siccome Q ha la stessa ascissa di uno dei vertici dell'ellisse, per la precisione il vertice sul semiasse positivo dell'asse x, l'altra retta è parallela all'asse y e ha equazione: $x = 2$

c. Verifico se il punto T appartiene all'ellisse, sostituendo le coordinate del punto all'ellisse: $1^2 + 4 \cdot ¾ = 4$. Siccome il punto appartiene all'ellisse, posso applicare la regola dello sdoppiamento:

$$x \cdot 1 + 4y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \qquad x + 2\sqrt{3}\,y = 4$$

17. Determina l'equazione dell'ellisse avente l'asse minore sull'asse x e lungo 6 e la distanza focale uguale a 4.

Se l'asse minore misura 6: a = 3. Se la distanza focale è 4, c = 2. Se l'asse minore è sull'asse x:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b^2 - a^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 3 \\ b^2 - 9 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 13 \end{cases} \qquad \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1}$$

18. Determina le coordinate dei punti di intersezione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x, i cui assi misurano $2\sqrt{52}$ e $2\sqrt{13}$, con la retta di equazione x – 2y + 2 = 0.

Prima determino l'ellisse:

$$\begin{cases} 2a = 2\sqrt{52} \\ 2b = 2\sqrt{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \sqrt{52} \\ b = \sqrt{13} \end{cases} \qquad \frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1 \qquad x^2 + 4y^2 = 52$$

Metto a sistema l'equazione dell'ellisse con quella della retta e determino così le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 52 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y - 2 \\ 4y^2 + 4 - 8y + 4y^2 = 52 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y - 2 \\ 8y^2 - 8y + 48 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 2 \\ y^2 - y + 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \boxed{A(-6; -2) \quad B(4; 3)}$$

19. Determina le intersezioni dell'ellisse: $3x^2 + 5y^2 = 57$ con la retta 2y + 3x = 0.

Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 57 \\ 2y + 3x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 57 \\ y = -\frac{3}{2}x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + \frac{45}{4}x^2 = 57 \\ y = -\frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{57}{4}x^2 = 57 \\ y = -\frac{3}{2}x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = -\frac{3}{2}x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \mp 3 \end{cases} \qquad \boxed{A(-2; 3) \quad B(2; -3)}$$

20. Scrivi l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $2x^2 + 5y^2 = 50$, nel suo punto del primo quadrante di ascissa 3.

Determino l'ordinata del punto dell'ellisse di ascissa 3, sostituendo x = 3 nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{9}{25} + \frac{y^2}{10} = 1 \qquad \frac{y^2}{10} = \frac{16}{25} \qquad y^2 = \frac{32}{5} \qquad y = \pm\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

Visto che il punto è del primo quadrante, le sue coordinate sono: $P\left(3; \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$.

Applico la formula dello sdoppiamento per determinare la tangente:

$$\frac{3x}{25} + \frac{4\sqrt{10}\,y}{50} = 1 \qquad \boxed{3x + 2\sqrt{10}\,y = 25}$$

21. Scrivi l'equazione dell'ellisse di vertice A (5, 0) e fuoco F (3, 0) e rappresentala.

Avendo vertice A (5; 0) $a = 5$ ed avendo fuoco F (3; 0) $c = 3$, perciò posso determinare il secondo coefficiente b:

$$a^2 - b^2 = c^2 \qquad \Rightarrow \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Perciò l'equazione dell'ellisse è: $\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

22. Scrivi l'equazione dell'ellisse passante per i punti A (0, 1) e B (3, 0) e rappresentala.

Passando per il punto A (0; 1) $b = 1$ e passando per B (3; 0) $a = 3$, perciò posso determinare l'equazione dell'ellisse:

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + y^2 = 1}$$