1. Determina l'equazione dell'ellisse:
   a. con fuoco in $(0;\ \sqrt{3})$ e con asse minore pari a 2;
   b. con i fuochi sull'asse x, di vertice (0; 5) e eccentricità $\frac{\sqrt{11}}{6}$;
   c. passante per i punti $\left(-\frac{12}{5};-3\right)$ e $\left(\frac{9}{5};-4\right)$.

A. Dalle informazioni date e notando che il fuoco è sull'asse y, ricavo il sistema:

$$\begin{cases} c=\sqrt{3} \\ a=1 \end{cases} \quad \begin{cases} c^2=3 \\ a=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2-a^2=3 \\ a=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2=4 \\ a=1 \end{cases} \quad \boldsymbol{x^2+\frac{y^2}{4}=1}$$

B. Dalle informazioni date, ricavo il sistema, ricordando però che, avendo i fuochi sull'asse x, l'eccentricità è data da $\frac{c}{a}$:

$$\begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{11}}{6} \\ b=5 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{c^2}{a^2}=\frac{11}{36} \\ b=5 \end{cases} \quad \begin{cases} 36\,(a^2-b^2)=11a^2 \\ b=5 \end{cases} \quad \begin{cases} 25\,a^2=36\cdot 25 \\ b=5 \end{cases} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1}$$

C. Impongo il passaggio dell'ellisse per i punti dati, sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione canonica dell'ellisse:

$\begin{cases} \frac{144}{25\,a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \\ \frac{81}{25\,a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \end{cases}$ ma per procedere più speditamente, uso delle incognite ausiliarie: $A=\frac{9}{25\,a^2}, B=\frac{1}{b^2}$ e il sistema diventa:

$$\begin{cases} 16A+9B=1 \\ 9A+16B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 16\,A+9\,B=9A+16B \\ 9A+16B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=B \\ 25\,A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{25} \\ B=\frac{1}{25} \end{cases} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$$

2. Determina l'equazione dell'iperbole:
   a. con i fuochi sull'asse y, avente distanza focale pari a 20 e un asintoto di equazione $y=\frac{4}{3}x$;
   b. con i fuochi sull'asse x, un asintoto di equazione $y=\frac{3}{4}x$ e passante per il punto $\left(10;\frac{9}{2}\right)$.

A. Dalle le informazioni date, ricavo il sistema:

$$\begin{cases} 2c=20 \\ \frac{b}{a}=\frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} c=10 \\ b=\frac{4}{3}a \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2=100 \\ b=\frac{4}{3}a \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+\frac{16}{9}a^2=100 \\ b=\frac{4}{3}a \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=36 \\ b^2=64 \end{cases} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=-1}$$

B. Dalle le informazioni date, ricavo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{b}{a}=\frac{3}{4} \\ \frac{100}{a^2}-\frac{81}{4\,b^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=\frac{3}{4}a \\ \frac{100}{a^2}-\frac{36}{a^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=\frac{3}{4}a \\ \frac{64}{a^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=64 \\ b^2=36 \end{cases} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1}$$

3. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti passante per il punto $\left(-\frac{3}{4};\frac{4}{3}\right)$.

L'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti ha generica equazione xy=k. Sostituendo le coordinate del punto dato, ottengo l'equazione:

$$\boldsymbol{xy=-1}$$

4. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri assi di simmetria passante per il punto (0; 2).

L'iperbole equilatera riferita ai propri assi di simmetria ha generica equazione: $x^2-y^2=\pm a^2$. Considerato che il punto dato è un vertice reale, l'equazione è: $x^2-y^2=-a^2$ con a pari a 2, cioè: $\boldsymbol{x^2-y^2=-4}$

5. Data l'equazione $y = \frac{2x}{cx-d}$, determina $a, d \in R$ in modo che il grafico abbia asintoti x = 3 e y = 1.

La generica espressione degli asintoti è: $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$, perciò ottengo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{c} = 3 \\ \frac{2}{c} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = \mathbf{6} \\ c = \mathbf{2} \end{cases} \qquad y = \frac{2x}{2x-6}$$

6. Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze dai punti $(-1; 2)$ e $(9; 2)$ è uguale a 6. Rappresenta l'equazione così determinata.

PROCEDIMENTO 1: Il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi è l'iperbole. In questo caso il centro di simmetria dell'iperbole corrisponde al punto medio tra i due punti, ovvero i fuochi: $M\ (4; 2)$. Inoltre la distanza focale è pari a 10, perciò $c = 5$ e, visto che la differenza delle distanze è 6, ovvero 2a, $a = 3$. Dalla relazione che esiste tra a e c, posso ricavare b: $b^2 = c^2 - a^2 = 16$. Quindi posso determinare l'equazione dell'iperbole con centro di simmetria nell'origine e poi traslarla con il vettore $\vec{v}(4; 2)$:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1}$$

PROCEDIMENTO 2: Considerando il punto P di coordinate generiche P (x; y), pongo la differenza delle distanze dai due punti dati uguale a 6:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-9)^2 + (y-2)^2} = \pm 6$$

Isolo una radice ed elevo entrambi i membri alla seconda:

$$\left(\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-9)^2 + (y-2)^2} \pm 6\right)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + (y-2)^2 = x^2 - 18x + 81 + (y-2)^2 + 36 \pm 12\sqrt{(x-9)^2 + (y-2)^2}$$

Eseguo i calcoli, isolo la radice ed elevo entrambi i membri alla seconda: $20x - 116 = \pm 12\sqrt{(x-9)^2 + (y-2)^2}$

Divido entrambi i membri per 4 prima di elevare alla seconda: $(5x - 29)^2 = \left(\pm 3\ \sqrt{(x-9)^2 + (y-2)^2}\right)^2$

$$25x^2 - 290x + 841 = 9x^2 - 162x + 729 + 9y^2 - 36y + 36$$

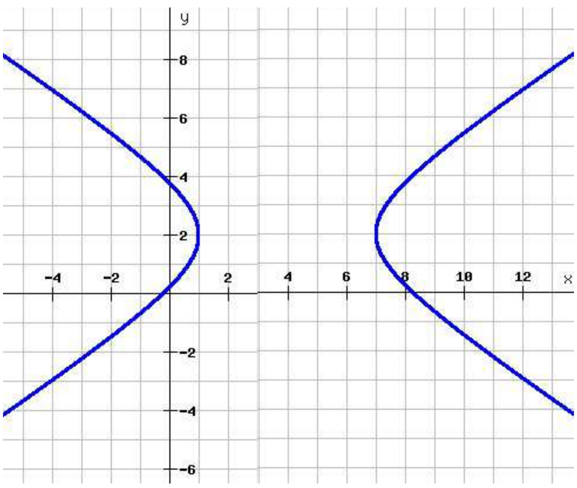
$$16x^2 - 9y^2 - 128x + 36y + 76 = 0$$

L'equazione rappresenta un'iperbole traslata. Per rappresentarla, la esprimo in forma diversa:

$$16x^2 - 128\,x + 256 - 9y^2 + 36y - 36 + 76 - 256 + 36 = 0$$

$$16\,(x-4)^2 - 9\,(y-2)^2 = 144 \qquad \boldsymbol{\frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1}$$

In altre parole, è un'iperbole di semiasse trasverso 3 e semiasse non trasverso 4 e traslata secondo il vettore (4; 2):



7. Determina l'equazione della tangente all'iperbole xy = – 1 nel suo punto di ordinata 2.

Determino innanzi tutto l'ordinata del punto di tangenza, sostituendo l'ordinata 2 nell'equazione dell'iperbole:

$$x \cdot 2 = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -\frac{1}{2}$$

Applico la formula di sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente:

$$\frac{xy_o + x_o y}{2} = k \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2x - \frac{1}{2}y}{2} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y = 4x + 4}$$

8. Determina l'equazione della tangente all'ellisse $y^2 + 2x^2 = 12$ nel suo punto di ordinata – 2 del quarto quadrante. Verifica inoltre che il triangolo individuato dalla retta con gli assi cartesiani ha area 9.

Determino innanzi tutto l'ascissa del punto di tangenza, sostituendo l'ordinata – 2 nell'equazione dell'ellisse:

$$4 + 2x^2 = 12 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 = 4$$

Applico la formula di sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente, con le coordinate del punto P (2; – 2):

$$yy_o + 2xx_o = 12 \qquad \Longrightarrow \qquad -2y + 4x = 12 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{2x - y - 6 = 0}$$

Per determinare l'area del triangolo che la retta forma con gli assi cartesiani, determino l'intersezione della retta con gli assi:

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases} \qquad A\ (0; -6\,)$$

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \qquad B\ (3; 0)$$

Il triangolo che si viene a formare è un triangolo rettangolo, con l'angolo retto nell'origine del piano cartesiano e i cateti di misura pari al valore assoluto dell'ordinata di A e al valore assoluto dell'ascissa B, perciò possiamo determinare l'area del triangolo:

$$\frac{\overline{AO} \cdot \overline{BO}}{2} = 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 9 \qquad\qquad \boldsymbol{c.v.d.}$$

9. Determina l'equazione delle tangenti all'iperbole $x^2 - 16\,y^2 = 25$, perpendicolari alla retta $2x + y = 0$.

Considero il fascio di rette perpendicolari alla retta data: $y = \frac{1}{2}x + k$.

Metto a sistema l'equazione del fascio con l'equazione dell'iperbole e pongo Δ = 0 nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + k \\ x^2 - 16\,y^2 = 25 \end{cases} \qquad x^2 - 16\left(\frac{1}{2}x + k\right)^2 = 25 \qquad \Longrightarrow \qquad -3\,x^2 - 16kx - 16k^2 - 25 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 64k^2 - 48\,k^2 - 75 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \pm\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

Le equazioni delle rette tangenti sono dunque: $\boldsymbol{x - 2\,y \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} = 0}$

10. Risolvi graficamente la disequazione: $\sqrt{-4x^2+9} > 2x+3$.

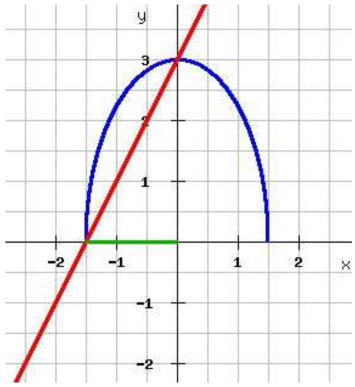
Dai due membri della disequazione, ricaviamo le equazioni di due funzioni:

$$y = \sqrt{-4x^2+9} \qquad \text{e} \qquad y = 2x+3.$$

La prima funzione è equivalente al sistema: $\begin{cases} y \geq 0 \\ 4x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

che rappresenta metà di un'ellisse con i fuochi sull'asse y.
Il dominio di questa funzione è: $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

La seconda funzione corrisponde alla retta. Dal grafico possiamo dedurre la soluzione: $-\frac{3}{2} < x < 0$.



11. Determina l'equazione della funzione omografica di vertici reali (– 3; – 1) e (1; – 5).

I vertici di un'iperbole sono sempre simmetrici rispetto al centro di simmetria, che posso determinare facendo il punto medio: $O'(-1;-3)$.

Avendo il centro di simmetria, posso considerare le coordinate generiche del centro di simmetria e il passaggio per uno dei due punti, da cui deriva il sistema:

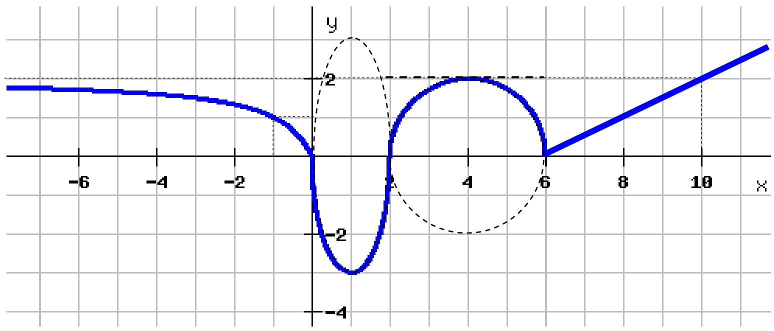
$$\begin{cases} -\frac{d}{c} = -1 \\ \frac{a}{c} = -3 \\ -1 = \frac{-3a+b}{-3c+d} \end{cases} \qquad \begin{cases} d = c \\ a = -3c \\ 9c + b = 3c - c \end{cases} \qquad y = \frac{-3cx - 7c}{cx + c} = \frac{c\,(-3x-7)}{c\,(1-x)} \qquad \boldsymbol{y = \frac{-3x-7}{x+1}}$$

12. Trova l'equazione corrispondente al seguente grafico, utilizzando i dati della figura:

La prima è la funzione omografica con asintoto orizzontale y = 2, passante per l'origine e per il punto (– 1; 1). Ovvero:

$$\begin{cases} \frac{a}{c} = 2 \\ \frac{-a+b}{-c+d} = 1 \\ \frac{b}{d} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2c \\ -2c = -c + d \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2c \\ b = 0 \\ d = -c \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{2x}{x-1}}$$



La seconda funzione è la metà inferiore di un'ellisse traslata:

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-0)^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9} = 1 - x^2 + 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = -3\sqrt{2x - x^2}}$$

La terza funzione è la metà superiore di una circonferenza:

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 - x^2 + 8x - 16 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = \sqrt{8x - x^2 - 12}}$$

L'ultima funzione è la retta passante per i punti (6; 0) e (10; 2):

$$\frac{x-6}{10-6} = \frac{y-0}{2-0} \qquad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - 3}$$

A questo punto possiamo scrivere l'equazione dell'intera funzione: $\boldsymbol{y = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & se\ x \leq 0 \\ -3\sqrt{2x-x^2} & se\ -0 < x \leq 2 \\ \sqrt{8x-x^2-12} & se\ 2 < x \leq 6 \\ \frac{1}{2}x - 3 & se\ x > 6 \end{cases}}$