1. Determina l'equazione dell'ellisse:
   a. con fuoco in $\left(\sqrt{3};0\right)$ e con semiasse minore pari a 1;
   b. con i fuochi sull'asse y, di vertice (0; 6) e eccentricità $\frac{\sqrt{11}}{6}$;
   c. passante per i punti $\left(3;\frac{12}{5}\right)$ e $\left(4;\frac{9}{5}\right)$.

A. Dalle informazioni date, ricavo il sistema:

$$\begin{cases} c=\sqrt{3} \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} c^2=3 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=4 \\ b=1 \end{cases} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{4}+y^2=1}$$

B. Dalle informazioni date, ricavo il sistema, ricordando però che, avendo i fuochi sull'asse y, l'eccentricità è data da $\frac{c}{b}$:

$$\begin{cases} \frac{c}{b}=\frac{\sqrt{11}}{6} \\ b=6 \end{cases} \quad \begin{cases} c=\sqrt{11} \\ b=6 \end{cases} \quad \begin{cases} c^2=11 \\ b=6 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2-a^2=11 \\ b=6 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=25 \\ b=6 \end{cases} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1}$$

C. Impongo il passaggio dell'ellisse per i punti dati, sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione canonica dell'ellisse:

$\begin{cases} \frac{9}{a^2}+\frac{144}{25\,b^2}=1 \\ \frac{16}{a^2}+\frac{81}{25\,b^2}=1 \end{cases}$ ma per procedere più speditamente, uso delle incognite ausiliarie: $A=\frac{1}{a^2}, B=\frac{1}{b^2}$ e il sistema diventa:

$$\begin{cases} 9A+\frac{144}{25}B=1 \\ 16A+\frac{81}{25}B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=\frac{25}{144}-\frac{25}{16}A \\ 16A+\frac{9}{16}-\frac{81}{16}A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 256A-81A=16-9 \\ B=\frac{25}{144}-\frac{25}{16}A \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{25} \\ B=\frac{1}{9} \end{cases} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$

2. Determina l'equazione dell'iperbole:
   a. con i fuochi sull'asse x, avente distanza focale pari a 10 e un asintoto di equazione $y=\frac{4}{3}x$;
   b. con i fuochi sull'asse y, eccentricità $\frac{5}{3}$ e con il semiasse trasverso di lunghezza 3.

A. Dalle le informazioni date, ricavo il sistema:

$$\begin{cases} 2c=10 \\ \frac{b}{a}=\frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} c=5 \\ b=\frac{4}{3}a \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ b=\frac{4}{3}a \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+\frac{16}{9}a^2=25 \\ b=\frac{4}{3}a \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=16 \end{cases} \quad \boldsymbol{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1}$$

B. Se i fuochi sono sull'asse y, il semiasse trasverso è b e l'eccentricità è $\frac{c}{b}$, perciò ricavo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{c}{b}=\frac{5}{3} \\ \frac{9}{a^2}-\frac{225}{16\,b^2}=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{25}{9} \\ \frac{9}{a^2}-\frac{225}{16\,b^2}=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=\frac{16}{9}b^2 \\ \frac{81}{16\,b^2}-\frac{225}{16\,b^2}=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=16 \\ b^2=9 \end{cases} \quad \boldsymbol{\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1}$$

3. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti passante per il punto (3; 4).

L'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti ha generica equazione xy=k. Sostituendo le coordinate del punto dato, ottengo l'equazione:

$$\boldsymbol{xy=12}$$

4. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri assi di simmetria passante per il punto (2; 0).

L'iperbole equilatera riferita ai propri assi di simmetria ha generica equazione: $x^2-y^2=\pm a^2$. Considerato che il punto dato è un vertice reale, l'equazione è: $x^2-y^2=a^2$ con a pari a 2, cioè: $\boldsymbol{x^2-y^2=4}$

5. Data l'equazione $y=\frac{ax-2}{x-d}$, determina $a, d\ \in R$ in modo che il grafico abbia asintoti x = 4 e y = 1.

La generica espressione degli asintoti è: $x=-\frac{d}{c},\ y=\frac{a}{c}$, perciò ottengo il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{d}{c}=4 \\ \frac{a}{c}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=\mathbf{4} \\ a=\mathbf{1} \end{cases} \qquad y=\frac{x-2}{x-4}$$

6. Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze dai punti $(-1;3)$ e $(5;3)$ è uguale a 10. Rappresenta l'equazione così determinata.

PROCEDIMENTO 1: Il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi è l'ellisse. In questo caso il centro di simmetria dell'ellisse corrisponde al punto medio tra i due punti, ovvero i fuochi: $M\ (2;3)$. Inoltre la distanza focale è pari a 6, perciò $c=3$ e, visto che la somma delle distanze è 10, ovvero 2a, $a=5$. Dalla relazione che esiste tra a e c, posso ricavare b: $b^2=a^2-c^2=16$. Quindi posso determinare l'equazione dell'ellisse con centro di simmetria nell'origine e poi traslarla con il vettore $\vec{v}(2;3)$:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1}$$

PROCEDIMENTO 2: Considerando il punto P di coordinate generiche P (x; y), pongo la somma delle distanze dai due punti dati uguale a 10:

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}=10$$

Isolo una radice ed elevo entrambi i membri alla seconda:

$$\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)^2=\left(-\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}+10\right)^2$$

$$x^2+2x+1+y^2-6y+9=x^2-10x+25+y^2-6y+9+100-20\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$$

Eseguo i calcoli, isolo la radice ed elevo entrambi i membri alla seconda: $12x-124=-20\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$

Divido entrambi i membri per 4 prima di elevare alla seconda: $(3x-31)^2=\left(-5\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}\right)^2$

$$9x^2-186x+961=25x^2-250x+625+25y^2-150y+225$$

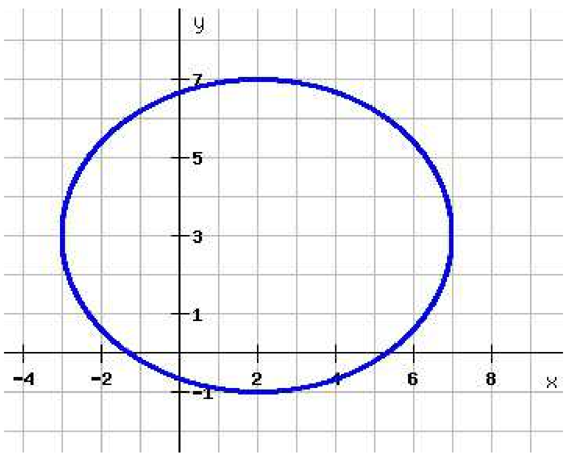
$$16x^2+25y^2-64x-150y-111=0$$

L'equazione rappresenta un'ellisse traslata. Per rappresentarla, la esprimo in forma diversa:

$$16x^2-64x+64+25y^2-150y+225-111-64-225=0$$

$$16\,(x-2)^2+25\,(y-3)^2=400 \qquad \boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1}$$

In altre parole, è un'ellisse di semiasse maggiore 5 e semiasse minore 4 e traslata secondo il vettore (2; 3):



7. Determina l'equazione della tangente all'iperbole xy = – 4 nel suo punto di ascissa – 1.

Determino innanzi tutto l'ordinata del punto di tangenza, sostituendo l'ascissa – 1 nell'equazione dell'iperbole:

$$-1\,y=-4 \qquad \Longrightarrow \qquad y=4$$

Applico la formula di sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente:

$$\frac{xy_o+x_oy}{2}=k \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{4x-y}{2}=-4 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y=4x+8}$$

8. Determina l'equazione della tangente all'iperbole $9\mathrm{y}^2-\mathrm{x}^2=45$ nel suo punto di ordinata – 3 del quarto quadrante. Verifica inoltre che il triangolo individuato dalla retta con gli assi cartesiani ha area $\frac{25}{4}$.

Determino innanzi tutto l'ascissa del punto di tangenza, sostituendo l'ordinata – 3 nell'equazione dell'iperbole:

$$81-x^2=45 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2=36$$

Applico la formula di sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente, con le coordinate del punto P (6; – 3):

$$9\,yy_o-xx_o=45 \qquad \Longrightarrow \qquad -27y-6x=45 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{2x+9y+15=0}$$

Per determinare l'area del triangolo che la retta forma con gli assi cartesiani, determino l'intersezione della retta con gli assi:

$$\begin{cases}2x+9y+15=0\\ x=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=0\\ y=-\dfrac{5}{3}\end{cases} \qquad A\left(0;-\frac{5}{3}\right)$$

$$\begin{cases}2x+9y+15=0\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=-\dfrac{15}{2}\\ y=0\end{cases} \qquad B\left(-\frac{15}{2};0\right)$$

Il triangolo che si viene a formare è un triangolo rettangolo, con l'angolo retto nell'origine del piano cartesiano e i cateti di misura pari al valore assoluto dell'ordinata di A e al valore assoluto dell'ascissa B, perciò possiamo determinare l'area del triangolo:

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}}{2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{4} \qquad \boldsymbol{c.v.d.}$$

9. Determina l'equazione delle tangenti all'ellisse $x^2+16y^2=25$, parallele alla retta $3x+16\,y-1=0$.

Considero il fascio di rette parallele alla retta data: $y=-\frac{3}{16}x+k$.
Metto a sistema l'equazione del fascio con l'equazione dell'ellisse e pongo Δ = 0 nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases}y=-\dfrac{3}{16}x+k\\ x^2+16\,y^2=25\end{cases} \qquad x^2+16\left(-\frac{3}{16}x+k\right)^2=25 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{25}{16}\,x^2-6kx+16k^2-25=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=9k^2-25\,k^2+\frac{25^2}{16}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad k=\pm\frac{25}{16}$$

Le equazioni delle rette tangenti sono dunque: $\boldsymbol{3x+16\,y\pm 25=0}$

10. Risolvi graficamente la disequazione: $\sqrt{x^2-9} \le \frac{2}{3}x+2$.

Dai due membri della disequazione, ricaviamo le equazioni di due funzioni:

$$y=\sqrt{x^2-9} \qquad \text{e} \qquad y=\frac{2}{3}x+2.$$

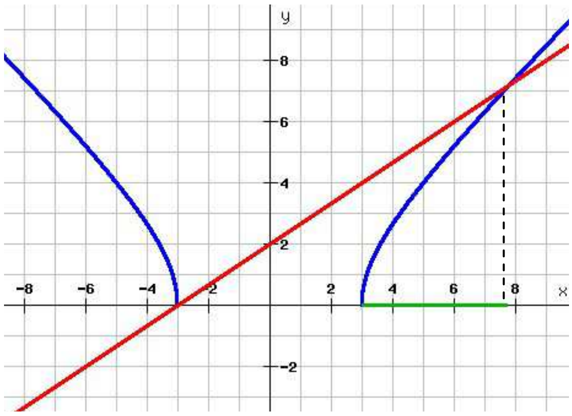
La prima funzione è equivalente al sistema: $\begin{cases} y \ge 0 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$

che rappresenta metà di un'iperbole equilatera con i fuochi sull'asse x e vertice reale (3;0)

Il dominio di questa funzione è: $x \le -3 \vee x \ge 3$.

La seconda funzione corrisponde alla retta.

Dal grafico possiamo dedurre la soluzione: $\boldsymbol{3 \le x \le \alpha \vee x = -3}$.



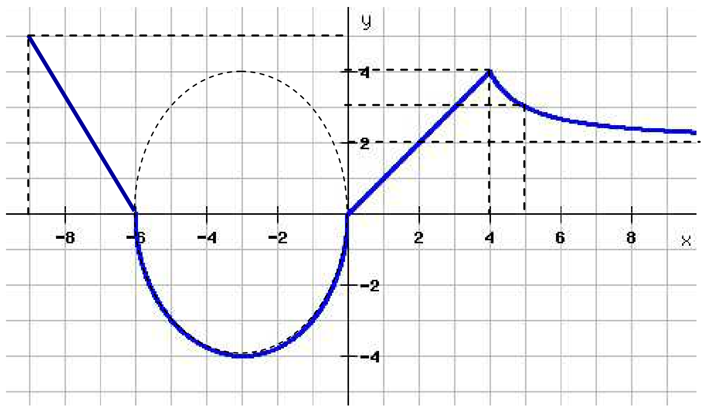
11. Determina l'equazione della funzione omografica di vertici reali (8; 4) e (2; 0).

I vertici di un'iperbole sono sempre simmetrici rispetto al centro di simmetria, che posso determinare facendo il punto medio: $O'(5;2)$.

Avendo il centro di simmetria, posso considerare le coordinate generiche del centro di simmetria e il passaggio per uno dei due punti (più comodo è quello sull'asse x), da cui deriva il sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{c}=5 \\ \dfrac{a}{c}=2 \\ 0=\dfrac{2a+b}{2c+d} \end{cases} \qquad \begin{cases} d=-5c \\ a=2c \\ b=-2a=-4c \end{cases} \qquad y=\frac{2cx-4c}{cx-5c}=\frac{c\,(2x-4)}{c\,(x-5)} \qquad \boldsymbol{y=\frac{2x-4}{x-5}}$$

12. Trova l'equazione corrispondente al seguente grafico, utilizzando i dati della figura:



La prima funzione è la retta passante per i punti (– 6; 0) e (– 9; 5), ovvero: $\frac{x+9}{-6+9}=\frac{y-5}{0-5} \Rightarrow \boldsymbol{y=-\frac{5}{3}x-10}$

La seconda funzione è la metà inferiore di un'ellisse traslata, con centro di simmetria (– 3; 0) e di semiassi 3 e 4, ovvero:

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-0)^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{16}=\frac{9-x^2-6x-9}{9}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y=-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}}$$

La terza funzione è la bisettrice di primo e terzo quadrante, cioè: **y = x**

L'ultima funzione è la funzione omografica di asintoto orizzontale y = 2 e passante per i punti (4; 4) e (5; 3). Ovvero possiamo imporre il passaggio della funzione per i due punti dati e considerare l'equazione generica dell'asintoto orizzontale:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{c}=2 \\ 4=\dfrac{4a+b}{4c+d} \\ 3=\dfrac{5a+b}{5c+d} \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2c \\ 16c+4d=8c+b \\ 15c+3d=10c+b \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2c \\ c+d=-2c \\ b=8c+4d \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2c \\ d=-3c \\ b=-4c \end{cases} \qquad y=\frac{2cx-4c}{cx-3c} \qquad \boldsymbol{y=\frac{2x-4}{x-3}}$$

A questo punto possiamo scrivere l'equazione dell'intera funzione: $y=\begin{cases} -\frac{5}{3}x-10 & se\ x \le -6 \\ -\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2} & se\ -6 < x \le 0 \\ x & se\ 0 < x \le 4 \\ \frac{2x-4}{x-3} & se\ x > 4 \end{cases}$