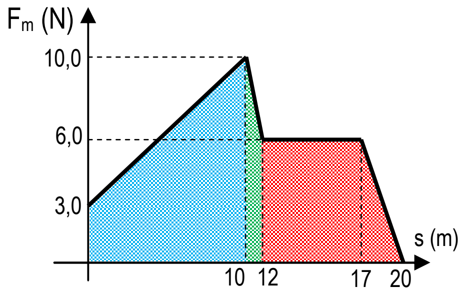
1. Riferendoti alla figura 1, determina il lavoro compiuto dalla forza variabile.

Per determinare il lavoro, calcolo l'area della regione di piano sottesa dal grafico.
Calcolo le aree secondo la suddivisione indicata dai colori, ovvero calcolo l'area di tre tapezi rettangoli.



$$A_1 = \frac{(3{,}0N + 10{,}0N) \cdot 10m}{2} = 65\,J$$

$$A_2 = \frac{(6{,}0N + 10{,}0N) \cdot 2m}{2} = 16\,J$$

$$A_3 = \frac{(5{,}0\,s + 8{,}0\,s) \cdot 6{,}0m}{2} = 39\,J$$

Il lavoro, sommando le tre aree, ha valore: $\boldsymbol{W = 120\,J}$

2. Al tempo t = 1,0 s un oggetto di 0,40 kg sta cadendo con una velocità di modulo 6,0 m/s. Al tempo t = 2,0 s, l'oggetto ha un'energia cinetica di 25 J.
   a. Qual è l'energia cinetica dell'oggetto a t = 1,0 s?
   b. Qual è il modulo della velocità a t = 2,0 s?
   c. Quanto lavoro è stato compiuto tra t = 1,0 s e t = 2,0 s?

A. Calcolo l'energia cinetica applicando la definizione:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \boldsymbol{7{,}2\,J}$$

B. Nel punto precedente, conoscevo la velocità e ho potuto calcolare l'energia cinetica. In questo caso, conoscendo l'energia cinetica, posso calcolare la velocità con la formula inversa:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \boldsymbol{11\,m/s}$$

C. Per calcolare il lavoro, applico il teorema delle forze vive:

$$W = K_2 - K_1 = \boldsymbol{18\,J}$$

3. Un blocco di 2,9 kg scivola con una velocità di 1,6 m/s su una superficie orizzontale senza attrito, fino a che incontra una molla.
   a. Se il blocco comprime la molla di 4,8 cm prima di fermarsi, qual è la costante elastica della molla?
   b. Quale velocità iniziale dovrebbe avere il blocco per comprimere la molla di 1,2 cm?

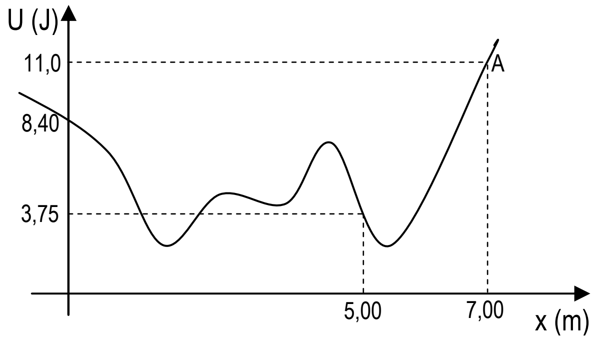
A. Eguaglio l'energia cinetica iniziale del blocco all'energia potenziale finale della molla, al massimo della compressione. Con una formula inversa, posso ricavare la costante elastica della molla:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k A^2 \qquad \Longrightarrow \qquad k = m\,\frac{v^2}{A^2} = \boldsymbol{3{,}2 \cdot 10^3\,N/m}$$

B. Eguagliando l'energia cinetica iniziale del blocco all'energia potenziale della molla associata alla compressione data e, con una formula inversa, ricavo la velocità:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v = x\sqrt{\frac{k}{m}} = \boldsymbol{0{,}40\,m/s}$$

4. Un oggetto di massa 1,60 kg si muove lungo l'asse x in un sistema conservativo in cui l'energia potenziale U segue l'andamento mostrato in figura 2. Se A rappresenta il punto di inversione del moto per questo oggetto, determina il modulo della velocità dell'oggetto in x = 0 m ed valore dell'energia cinetica in x = 5,00 m.



Il punto di inversione del moto mi indica l'energia meccanica che ha valore 11,0 J, come indicato nel grafico. Nel punto x = 0, conoscendo l'energia potenziale e quella meccanica posso ricavare, per differenza, l'energia cinetica e da essa, con una formula inversa, la velocità:

$$K_o = E - U_o = \frac{1}{2} m v_o^2$$

$$v_o = \sqrt{\frac{2\,(E - U_o)}{m}} = \mathbf{1,80\ m/s}$$

Per calcolare l'energia cinetica in x = 5,00 m, non mi resta che fare la differenza tra energia meccanica e energia potenziale (indicata nel grafico):

$$K_1 = E - U_1 = \mathbf{7,25\ J}$$

5. Un ciclista di 65 kg guida la sua bicicletta di 10 kg con una velocità di modulo 12 m/s.
   a. Quanto lavoro deve essere compiuto dai freni per frenare il ciclista con la bicicletta?
   b. Quanta strada compie la bicicletta se ci vogliono 4,0 s per fermarla?
   c. Qual è il modulo della forza frenante?

Con il teorema delle forze vive, posso calcolare il lavoro compiuto dai freni per frenare il ciclista con la bicicletta:

$$W = K - K_o = -\frac{1}{2} m v_o^2 = \mathbf{-5,4 \cdot 10^3\ J}$$

Considerato che, nel moto uniformemente accelerato, lo spazio percorso si può calcolare come area sottesa dal grafico vt, posso ricavare lo spazio percorso, conoscendo la velocità iniziale, quella finale e il tempo:

$$s = \frac{(v + v_o)t}{2} = \mathbf{24\ m}$$

Sapendo che il lavoro è il prodotto scalare di forza e spostamento e, in questo caso, forza e spostamento hanno la stessa direzione, ma verso opposto:

$$W = -Fx \quad \Longrightarrow \quad F = -\frac{W}{x} = \mathbf{225\ N}$$

6. Un oggetto è appeso a un'altezza di 10 m dal suolo. Il filo che lo sostiene all'improvviso si rompe e il peso cade, in assenza di forze esterne.
    a. Quanto vale la velocità acquistata quando si trova a 4,0 m dal suolo?
    b. A che altezza si trova quando possiede una velocità di 6,0 m/s?

In entrambi i casi, uso la legge di conservazione dell'energia, nel primo caso ricavando la velocità, nel secondo l'altezza:

A. $U_o + K_o = U_1 + K_1 \quad \Longrightarrow \quad mgh = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \sqrt{2g\,(h-h_1)} = \mathbf{11\ m/s}$

B. $U_o + K_o = U_2 + K_2 \quad \Longrightarrow \quad mgh = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Longrightarrow \quad h_2 = h - \frac{v_2^2}{2g} = \mathbf{8,2\ m}$

7. Un ascensore percorre un tratto verticale lungo 70 m a una velocità di 1,6 m/s. L'ascensore ha una capienza di 23 persone, ognuna considerata di massa in media pari a 75 kg. Calcola il lavoro compiuto dall'ascensore per trasportare un passeggero e la potenza sviluppata per trasportare la cabina a pieno carico dall'inizio alla fine della salita.

Calcolo il lavoro, come variazione di energia potenziale, per trasportare un passeggero:

$$W_1 = mgh = \mathbf{5,2 \cdot 10^4\ J}$$

Ricavo la potenza per trasportare le 23 persone:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{nmgh}{t} = nmg \cdot \frac{h}{t} = nmgv = \mathbf{2,7 \cdot 10^4\ W}$$

8. Per accelerare una determinata automobile da una velocità di modulo v a una velocità di modulo 2v è necessario un lavoro W_1. Il lavoro necessario per accelerare l'automobile da 2v a 3v è W_2. Quanto vale il rapporto W_2/W_1? Motiva la tua risposta.

Calcolo il lavoro necessario per portare l'auto dalla velocità v alla velocità 2v, usando il teorema delle forze vive:

$$W_1 = K - K_o = \frac{1}{2}m(2v)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \mathbf{\frac{3}{2}mv^2}$$

Allo stesso modo per W_2:

$$W_2 = K_2 - K = \frac{1}{2}m(3v)^2 - \frac{1}{2}m(2v)^2 = \mathbf{\frac{5}{2}mv^2}$$

Facendo il rapporto tra i due lavori:

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{5}{2}mv^2 : \left(\frac{3}{2}mv^2\right) = \mathbf{\frac{5}{3}}$$

9. Perché l'energia potenziale elastica di una molla aumenta sempre quando essa viene spostata dalla posizione di equilibrio?

Poiché l'energia potenziale dipende dal quadrato della compressione (o dell'espansione) x^2, che è positivo anche se x è negativo, l'energia potenziale elastica è sempre maggiore o uguale a zero, quindi l'energia potenziale elastica di una molla aumenta sempre quando essa viene spostata dalla posizione di equilibrio.

10. Fai l'analisi dimensionale dell'energia.

$$E = \mathbf{[M][L^2][T^{-2}]}$$