1. $\dfrac{x+2-\frac{9}{2}x^2}{8-x^3}+\dfrac{3}{2x-4}=\dfrac{4x-1}{x^2+2x+4}+\dfrac{2}{x-2}$

$$\frac{2x+4-9x^2}{-(x^3-8)}+\frac{3}{2(x-2)}=\frac{4x-1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x-2}$$

$$-\frac{2x+4-9x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}+\frac{3}{2(x-2)}=\frac{4x-1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x-2} \qquad C.A.: x\neq 2$$

$$\frac{-(2x+4-9x^2)+3\,(x^2+2x+4)}{2\,(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{2(4x-1)(x-2)+4\,(x^2+2x+4)}{2\,(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$-2x-4+9x^2+3x^2+6x+12=8x^2-16x-2x+4+4x^2+8x+16$$

$$6x+16x-8x=4-12+4+16 \qquad 14x=12 \qquad x=\frac{6}{7}\ acc.$$

2. $\dfrac{1}{x^2-x}:\dfrac{x+3}{2x^2+7x+3}=\left(\dfrac{2x}{x^4-1}:\dfrac{2}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}\right):x$

$$\frac{1}{x\,(x-1)}:\frac{x+3}{2x^2+6x+x+3}=\left(\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}:\frac{2}{x^2(x-1)+1\,(x-1)}+\frac{x-1}{x+1}\right):x$$

$$\frac{1}{x(x-1)}\cdot\frac{(x+3)(2x+1)}{x+3}=\left(\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)(x^2+1)}{2}+\frac{x-1}{x+1}\right):x \qquad C.A.:\begin{cases} x\neq 0\\ x\neq -3\\ x\neq \pm 1\\ x\neq -\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\frac{2x+1}{x(x-1)}=\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{1}{x} \qquad \frac{2x+1}{x(x-1)}=\frac{2x-1}{x(x+1)}$$

$$(2x+1)(x+1)=(2x-1)(x-1) \qquad 2x^2+2x+x+1=2x^2-2x-x+1$$

$$x=0 \quad non\ accettabile\ per\ le\ C.A. \quad \Rightarrow \quad \nexists x\in\mathbb{R}$$

3. $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 10x = 0$

$x\,(x^3 - 2x^2 - 13x - 10) = 0$

Per il teorema del resto:

$P(1) = 1 - 2 - 13 - 10 \neq 0$ $\qquad$ $P(-1) = -1 - 2 + 13 - 10 = 0$

Perciò, applicando la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -13 & -10 \\ -1 & & -1 & 3 & 10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

$x\,(x+1)(x^2 - 3x - 10) = 0$ $\qquad$ $x\,(x+1)(x+2)(x-5) = 0$

$x_1 = \mathbf{0} \qquad x_2 = \mathbf{-1} \qquad x_3 = \mathbf{-2} \qquad x_4 = \mathbf{5}$

4. $(k^2 - 2k)\,x = k^2 - 4$

$k\,(k-2)\,x = (k-2)(k+2)$

$\boldsymbol{Se\ k = 0:\ \ 0x = -4 \qquad \nexists x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{Se\ k = 2:\ \ 0x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{Se\ k \neq 0\ \ \wedge\ \ k \neq 2 : x = \dfrac{k+2}{k}}$

5. $3abx - 3ax + 1 = b^2$

$3ax\,(b-1) = (b-1)(b+1)$

$\boldsymbol{Se\ a = 0\ \ \wedge\ \ b = \pm 1:\ \ 0x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{Se\ a = 0\ \ \wedge\ \ b \neq \pm 1:\ \ 0x = b^2 - 1 \qquad \nexists x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{Se\ b = 1:\ \ 0x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$

$\boldsymbol{Se\ a \neq 0\ \ \wedge\ \ b \neq 1 : x = \dfrac{b+1}{3a}}$

6. Trova, se esistono, i numeri naturali pari il cui reciproco è uguale al doppio del reciproco del numero pari successivo.

Indico il numero naturale con $2x$, mentre il numero pari successivo è $2x+2$, perciò:

$$\frac{1}{2x}=2\cdot\frac{1}{2x+2} \qquad \frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}=0 \qquad \frac{x+1-2x}{2x\,(x+1)}=0 \qquad C.A.:\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq -1\end{cases} \qquad x=1$$

Perciò il numero naturale che soddisfa la proprietà data è **2**.

7. Determina tre numeri pari consecutivi, sapendo che il rapporto tra la loro somma diminuita di 5 e il doppio della somma dei loro successivi diminuito di 3 è uguale a $\frac{1}{3}$.

I tre numeri pari consecutivi sono:

$$n_1=2x \qquad n_2=2x+2 \qquad n_3=2x+4$$

$$\frac{n_1+n_2+n_3-5}{2\,(n_1+1+n_2+1+n_3+1)-3}=\frac{1}{3} \qquad \frac{2x+2x+2+2x+4-5}{2(2x+1+2x+3+2x+5)-3}=\frac{1}{3}$$

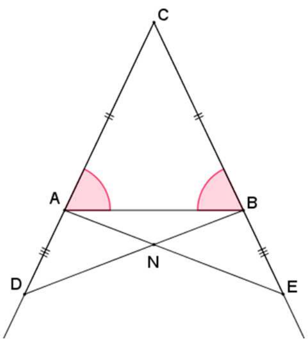
$$\frac{6x+1}{2(6x+9)-3}=\frac{1}{3} \qquad \frac{6x+1}{12x+18-3}=\frac{1}{3} \qquad \frac{6x+1}{3(4x+5)}=\frac{1}{3} \qquad \frac{6x+1}{4x+5}=1 \qquad C.A.: x\neq -\frac{5}{4}$$

$$6x+1=4x+5 \qquad 2x=4 \qquad x=2$$

Perciò i numeri pari richiesti sono:

$$n_1=\mathbf{4} \qquad n_2=\mathbf{6} \qquad n_3=\mathbf{8}$$

8. Sui prolungamenti dei lati CA e CB di un triangolo isoscele ABC considera rispettivamente i segmenti AD e BE tra loro congruenti. Detto N il punto di intersezione dei segmenti DB e AE, dimostra che il triangolo ANB è isoscele.



Hp:
$\overline{AC}\cong\overline{BC}$
$C, A, D\ allineati$
$C, B, E\ allineati$
$\overline{AD}\cong\overline{BE}$

Tesi:
$ANB\ isoscele$

Dimostrazione:

Consideriamo i triangoli AEC e CDB. Essi hanno:

- $\overline{AC}\cong\overline{CB}$ per ipotesi
- $\overline{DC}\cong\overline{CE}$ perché somma di segmenti congruenti per ipotesi
- $A\hat{B}C$ in comune

$AEC\cong CDB$ per il primo criterio di congruenza dei triangoli

Di conseguenza: $C\hat{A}E\cong D\hat{B}C$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti, perciò $B\hat{A}N\cong N\hat{B}A$ per differenza di angoli congruenti (perché gli angoli $C\hat{A}B\cong A\hat{B}C$ sono angoli alla base di un triangolo isoscele). Concludendo: se gli angoli adiacenti al lato AB sono congruenti, il triangolo ANB è isoscele sulla base AB.

c.v.d.