1. Calcola il valore delle seguenti espressioni:

$$\left(\frac{1+2i}{i-1}+\frac{39i}{2+3i}-\frac{19}{2}\right)\cdot 2i+6i \qquad\qquad \frac{18\,i^{18}+7\,i^{6}}{(2\,i^{52}+i^{53})^2}:\frac{4\,i^{36}-2\,i^{20}}{(2\,i^{8}+i^{7}-i^{20})^2}$$

$$\left(\frac{1+2i}{i-1}+\frac{39i}{2+3i}-\frac{19}{2}\right)\cdot 2i+6i=\left(\frac{1+2i}{i-1}\cdot\frac{i+1}{i+1}+\frac{39\,i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}-\frac{19}{2}\right)\cdot 2i+6i=$$

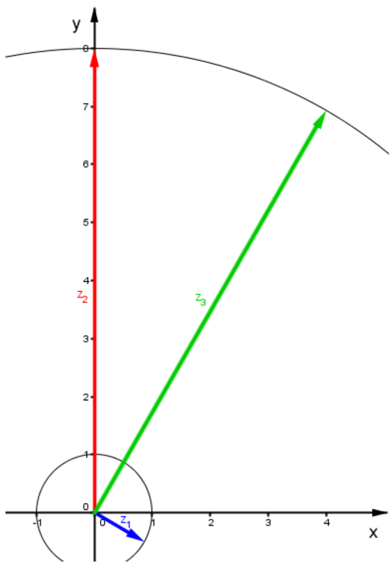
$$=\left(\frac{3i-1}{-2}+\frac{39\,(2i+3)}{4+9}-\frac{19}{2}\right)\cdot 2i+6i=\left(-\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}+6i+9-\frac{19}{2}\right)\cdot 2i+6i=\mathbf{-9+6i}$$

$$\frac{18\,i^{18}+7\,i^{6}}{(2\,i^{52}+i^{53})^2}:\frac{4\,i^{36}-2\,i^{20}}{(2\,i^{8}+i^{7}-i^{20})^2}=\frac{-18-7}{(2\ +i)^2}\cdot\frac{(2-i-1)^2}{4\ -2}=-\frac{25}{2}\cdot\frac{1-1-2i}{4-1+4i}=$$

$$=25\,i\cdot\frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}=25\ \cdot\frac{3i+4}{9+16}=\mathbf{4+3i}$$

2. Dopo aver rappresentato il numero z nel piano complesso, scrivilo in forma trigonometrica ed esponenziale:

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \qquad\qquad z=8i \qquad\qquad z=4+4\sqrt{3}\,i$$



Rappresentato in blu: $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\mathbf{1}\left(\boldsymbol{\cos\frac{11}{6}\pi+i\,sen\frac{11}{6}\pi}\right)=\boldsymbol{e^{i\frac{11}{6}\pi}}$

Rappresentato in rosso: $z_2=8i=\mathbf{8}\left(\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{2}+i\,sen\frac{\pi}{2}}\right)=\boldsymbol{8e^{i\frac{\pi}{2}}}$

Rappresentato in verde: $z_3=4+4\sqrt{3}\,i=\mathbf{8}\left(\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{3}+i\,sen\frac{\pi}{3}}\right)=\boldsymbol{8e^{i\frac{\pi}{3}}}$

3. Dopo aver determinato le soluzioni del sistema $\begin{cases}2z_1+z_2=4\\2iz_1-z_2=0\end{cases}$, scrivi in forma esponenziale: z_1, z_2, $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\begin{cases}2z_1+z_2=4\\2iz_1-z_2=0\end{cases}\qquad\begin{cases}(2+2i)\,z_1=4\\z_2=2iz_1\end{cases}\qquad\begin{cases}z_1=\frac{2}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=1-i\\z_2=2iz_1=2i\,(1-i)=2+2i\end{cases}$$

$$z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+isen\frac{7}{4}\pi\right)=\boldsymbol{\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}} \qquad z_2=2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+isen\frac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_1\cdot z_2=\ \boldsymbol{4e^{i2\pi}} \qquad \frac{z_1}{z_2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{i\frac{3}{2}\pi}}$$

4. Risolvi le seguenti equazioni nel campo complesso: $z^3+8i=0$ $\qquad z^2+z+1=0$

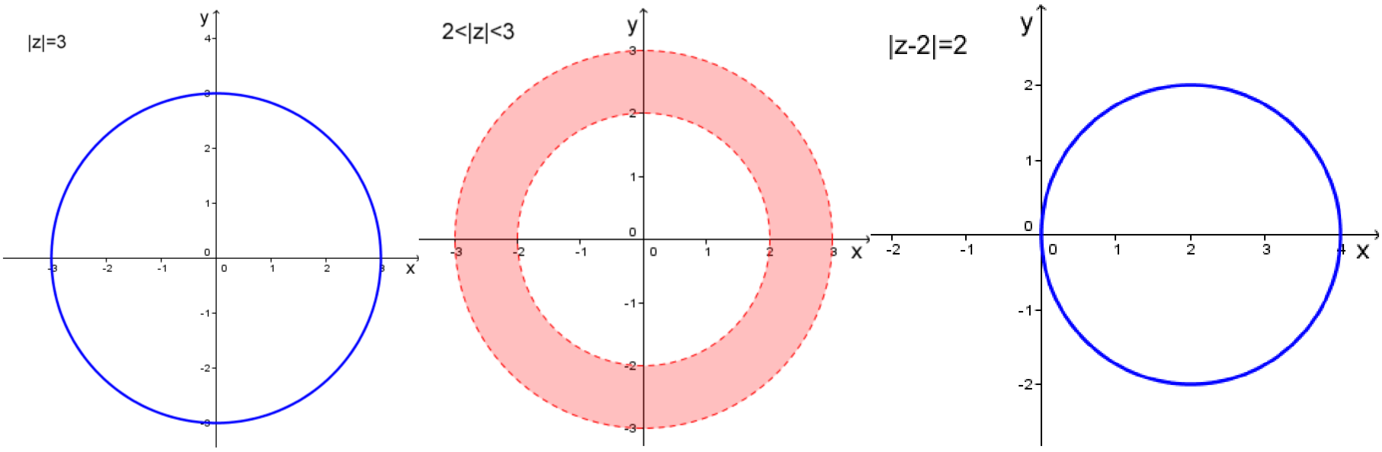
$$z^3+8i=0 \qquad z=\sqrt[3]{-8i}=2\sqrt[3]{\cos\frac{3}{2}\pi+i\,sen\frac{3}{2}\pi}=2\left(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{3}+i\,sen\,\frac{\frac{3}{2}\pi+2k\pi}{3}\right)$$

$$z_1=\boldsymbol{2i} \qquad z_2=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\,sen\frac{7}{6}\pi\right)=\boldsymbol{-\sqrt{3}-i} \qquad z_1=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\,sen\frac{11}{6}\pi\right)=\boldsymbol{\sqrt{3}-i}$$

$$z^2+z+1=0 \qquad z_{1,2}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

5. Rappresenta nel piano complesso i punti corrispondenti ai numeri complessi z che verificano le seguenti relazioni:

$$|z|=3 \qquad 2<|z|<3 \qquad |z-2|=2$$

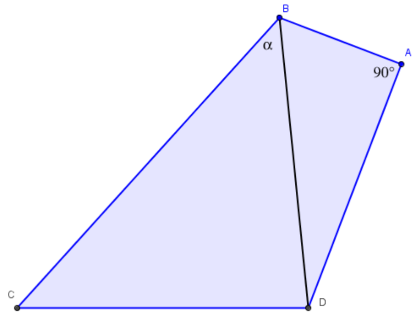


6. Verifica che il polinomio $P(z)=z^3+(1+2i)\,z^2+\left[\left(-\sqrt{3}+2\right)i-2\right]z-i\sqrt{3}-2$ si annulla per $z=-1$.

Sostituendo z = - 1, verifico che il polinomio si annulla:

$$P(-1)=-1+1+2i-\left[\left(-\sqrt{3}+2\right)i-2\right]-i\sqrt{3}-2=2i+\sqrt{3}\,i-2i+2-i\sqrt{3}-2=\boldsymbol{0}$$

7. Nel quadrilatero ABCD si sa che i lati AB, AD, BC misurano rispettivamente a, $2a$, $3a$ e che $B\hat{A}D = 90°$, $D\hat{B}C = \alpha$, essendo $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Calcola la misura del lato DC.



Posso calcolare la lunghezza del lato BD che è l'ipotenusa del triangolo ABD, dove conosco il cateto AB (a) e il cateto AD ($2a$), perciò, applicando il teorema di Pitagora:

$$BD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a$$

Ora, applicando il teorema del coseno, posso calcolare il lato DC:

$$DC = \sqrt{BC^2 + BD^2 - 2\,BC\,\cdot BD\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{9a^2 + 5a^2 - 6\sqrt{5}\,a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = \mathbf{2\sqrt{2}a}$$

8. Risolvi i seguenti sistemi parametrici con metodo grafico:

$$\begin{cases} 2 + \cos 2x = k\,(1 + sen\,2x) \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 6\cos^2 x - 2\,senx\cos x + 4\,sen^2 x = k \\ \dfrac{\pi}{8} \le x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + \cos 2x = k\,(1 + sen\,2x) \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 + X - k\,(1 + Y) = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -1 \le X \le 1 \quad \wedge \quad 0 \le Y \le 1 \end{cases}$$

Si tratta di un fascio proprio, di centro $C\,(-2;\,-1)$ e di una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1:

Considero solo la semicirconferenza che si trova nel semipiano positivo delle y.

Impongo il passaggio del fascio per il punto $A\,(1;0)$:

$$2 + 1 - k = 0 \qquad k = 3$$

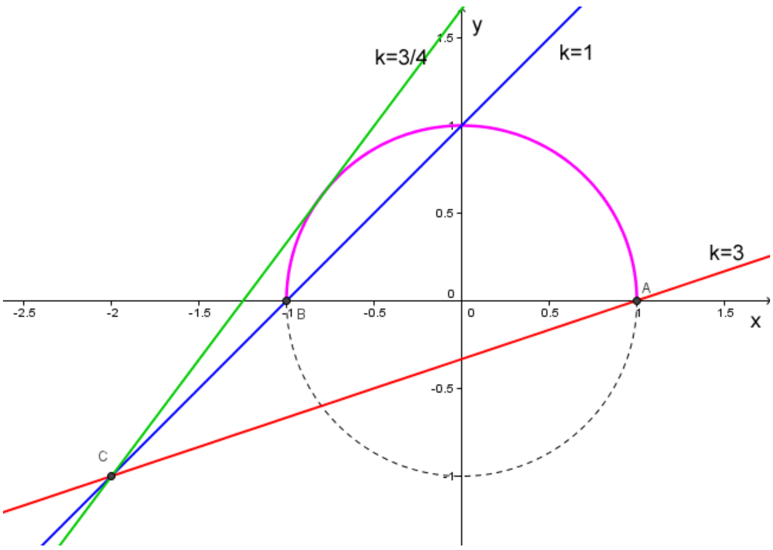
Impongo il passaggio del fascio per il punto $B\,(-1;0)$:

$$2 - 1 - k = 0 \qquad k = 1$$

Trovo il valore di k per la tangente alla circonferenza, imponendo la distanza della generica retta del fascio dal centro della circonferenza uguale al raggio, cioè a 1:

$$\frac{|2-k|}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \qquad 4 - 4k + k^2 = 1 + k^2$$

$$-4k = -3 \qquad k = \frac{3}{4}$$



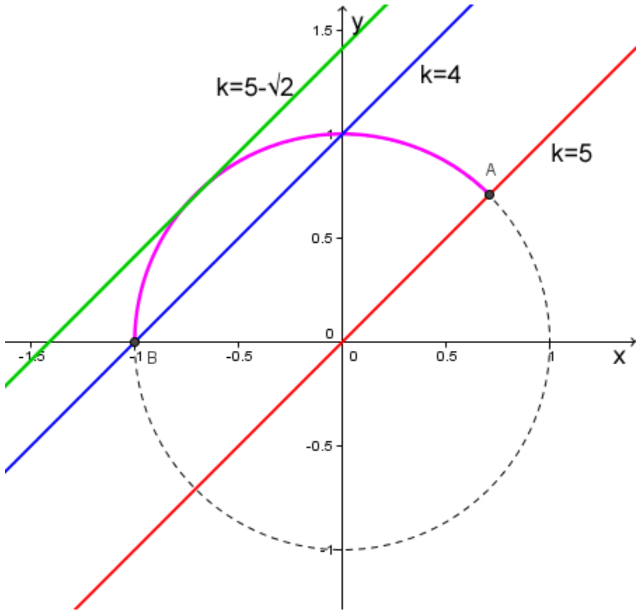
Ora posso determinare la soluzione:

$$\mathbf{1\ soluzione\ per}\quad \mathbf{1 < k \le 3} \qquad \mathbf{2\ soluzioni\ per}\quad \mathbf{\frac{3}{4} \le k \le 1}$$

$$\begin{cases} 6\cos^2 x - 2\,senx\cos x + 4\,sen^2 x = k \\ \frac{\pi}{8} \le x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 6\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} - sen\,2x + 4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} = k \\ \frac{\pi}{4} \le 2x < \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} X - Y + 5 - k = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -1 < X \le \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad 0 \le Y \le 1 \end{cases}$$

Si tratta di un fascio improprio, con rette parallele alla bisettrice di primo e terzo quadrante e di una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1:



Impongo il passaggio del fascio per il punto $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 - k = 0 \qquad k = 5$$

Impongo il passaggio del fascio per il punto $B\ (-1;0)$:

$$-1 + 5 - k = 0 \qquad k = 4$$

Trovo il valore di k per la tangente alla circonferenza, imponendo la distanza della generica retta del fascio dal centro della circonferenza uguale al raggio, cioè a 1:

$$\frac{|5-k|}{\sqrt{1+1}} = 1 \qquad 5 - k = \pm\sqrt{2}$$

$$k = 5 \pm \sqrt{2}$$

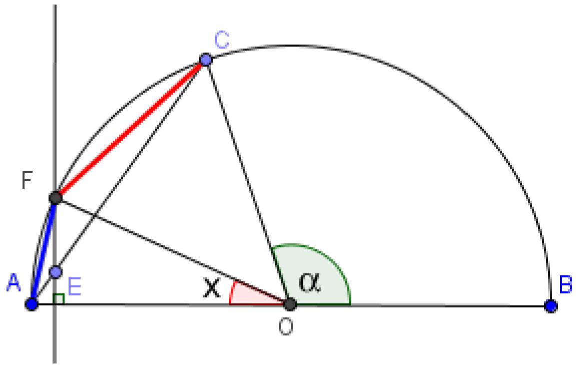
Il valore che interessa è quello di $k = 5 - \sqrt{2}$

Ora posso determinare la soluzione:

$$\boldsymbol{1\ soluzione\ per\quad 4 \le k \le 5} \qquad \boldsymbol{2\ soluzioni\ per\quad 5-\sqrt{2} \le k < 4}$$

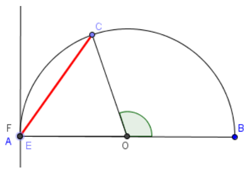
9. Sono dati una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e un punto C su di essa tale che $\cos B\hat{O}C = -\frac{7}{25}$. Conduci una perpendicolare ad AB che incontri in E la corda AC e in F la semicirconferenza in modo che risulti:

$$\overline{FC} + \overline{AF} = 2kr \qquad (k \in \mathbb{R}_o^+)$$



Considero innanzi tutto le due situazioni limite, dopo aver posto l'angolo $F\hat{O}A = x$:

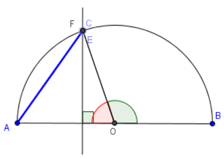
$x = 0$



$$\overline{FC} = \overline{AC} = 2r\ sen\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = 2r\ cos\ \frac{\alpha}{2} = 2r\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \frac{6}{5}r \qquad \overline{AF} = 0$$

$$\frac{6}{5}r = 2kr \qquad k = \frac{3}{5} \qquad acc.$$

$x = \pi - \alpha$



$$\overline{FC} = 0 \qquad \overline{AF} = \overline{AC} = 2r\ sen\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = 2r\ cos\ \frac{\alpha}{2} = 2r\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \frac{6}{5}r$$

$$\frac{6}{5}r = 2kr \qquad k = \frac{3}{5} \qquad acc.$$

Perciò: $\mathbf{0 \leq x \leq \pi - \alpha}$

Nel caso generale:
$\overline{AF} = 2r\ sen\frac{x}{2}$ perché l'angolo alla circonferenza sotteso dalla corda è metà dell'angolo al centro, x.
$\overline{FC} = 2r\ sen\frac{\pi-x-\alpha}{2} = 2r\cos\frac{x+\alpha}{2}$ perché l'angolo alla circonferenza sotteso dalla corda è metà dell'angolo al centro, π-x-α.

Perciò:

$$2r\ \cos\frac{x+\alpha}{2} + 2r\ sen\frac{x}{2} = 2kr \qquad \cos\frac{x}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - sen\frac{x}{2}sen\frac{\alpha}{2} + sen\frac{x}{2} = k$$

Dato che $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$ allora $sen\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$ e $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$, perciò:

$$\frac{3}{5}\cos\frac{x}{2} - \frac{4}{5}sen\frac{x}{2} + sen\frac{x}{2} = k \qquad sen\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2} = 5\,k$$

Il sistema ottenuto è:

$$\begin{cases} sen\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2} = 5k \\ 0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi-\alpha}{2} \end{cases}$$