1. Calcola il valore della seguente espressione:

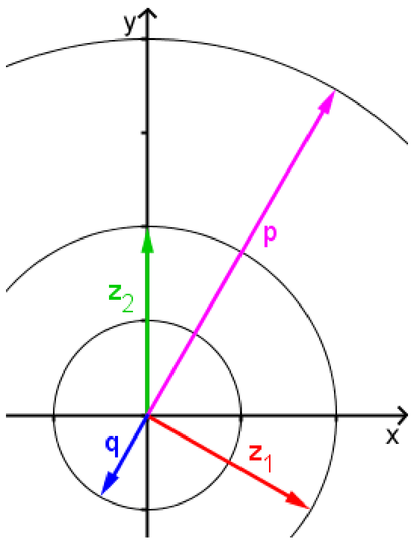
$$\left(\frac{2-3i}{1+i^7}+\frac{14i}{3+4i^{52}}-\frac{3}{4}\right)\cdot 4i^{12}-i^{20}$$

$$\left(\frac{2-3i}{1+i^7}+\frac{14i}{3+4i^{52}}-\frac{3}{4}\right)\cdot 4i^{12}-i^{20}=\left(\frac{2-3i}{1-i}+\frac{14i}{3+4}-\frac{3}{4}\right)\cdot 4-1=\left(\frac{2-3i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}+2i-\frac{3}{4}\right)\cdot 4-1=$$

$$=\left(\frac{2+2i-3i+3}{1+1}+2i-\frac{3}{4}\right)\cdot 4-1=\left(-\frac{1}{2}i+\frac{5}{2}+2i-\frac{3}{4}\right)\cdot 4-1=6i+7-1=\boldsymbol{6+6i}$$

2. Dopo aver determinato le soluzioni del sistema $\begin{cases}2z_1+z_2=2\sqrt{3}\\ 2iz_1-\sqrt{3}\,z_2=2\end{cases}$, scrivi in forma esponenziale: z_1, z_2, $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ e rappresentali nel piano complesso.

$$\begin{cases}2z_1+z_2=2\sqrt{3}\\ 2iz_1-\sqrt{3}\,z_2=2\end{cases}\qquad\begin{cases}2z_1+z_2=2\sqrt{3}\\ -2z_1-i\sqrt{3}\,z_2=2i\end{cases}\qquad\begin{cases}z_2=\frac{2\sqrt{3}+2i}{1-i\sqrt{3}}\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=2i\\ z_1=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i\end{cases}$$



$$z_1=\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i sen\frac{11}{6}\pi\right)=\boldsymbol{2e^{i\frac{11}{6}\pi}}$$

$$z_2=2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i sen\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$z_1\cdot z_2=\boldsymbol{4e^{i\frac{\pi}{3}}}\qquad\frac{z_1}{z_2}=\boldsymbol{e^{i\frac{4}{3}\pi}}$$

Nel piano complesso ho indicato il prodotto dei due numeri con p e il quoziente con q.

3. Risolvi la seguente equazione nel campo complesso: $z^4+16=0$

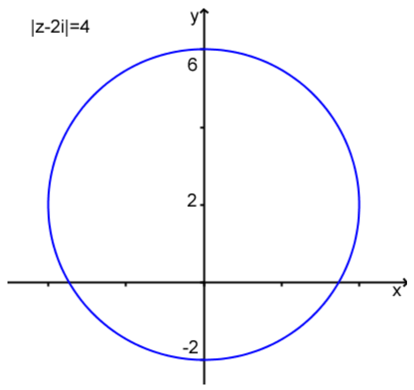
$$z^4+16=0\qquad z=\sqrt[4]{-16}=2\sqrt[4]{\cos\pi+i\,sen\pi}=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\,sen\,\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$$

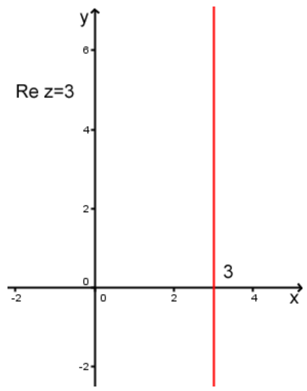
$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,sen\frac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}\qquad z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\,sen\frac{3}{4}\pi\right)=\boldsymbol{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}$$

$$z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\,sen\frac{5}{4}\pi\right)=\boldsymbol{-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}\qquad z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\,sen\frac{7}{4}\pi\right)=\boldsymbol{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}$$

4. Rappresenta nel piano complesso i punti corrispondenti ai numeri complessi z che verificano le seguenti relazioni:

$$|z-2i|=4 \qquad Re\ z=3$$





5. Risolvi il seguente sistema parametrico con metodo grafico:

$$\begin{cases}(2k-3)\cos^2 x+k+4\ sen\ x\cos x=(2k+3)\ sen^2 x\\ 0<x<\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2k-3)\ \dfrac{1+\cos 2x}{2}+k+2\ sen\ 2x=(2k+3)\ \dfrac{1-\cos 2x}{2}\\ 0<2x<\dfrac{2}{3}\pi\end{cases}$$

$$\begin{cases}2k-3+2k\cos 2x-3\cos 2x+2k+4\ sen\ 2x=2k+3-2k\cos 2x-3\cos 2x\\ 0<2x<\dfrac{2}{3}\pi\end{cases}$$

$$\begin{cases}2kX-3+2Y+k=0\\ X^2+Y^2=1\\ -\dfrac{1}{2}<X<1\ \wedge\ \ 0<Y\le 1\end{cases}$$

Si tratta di un fascio proprio, di centro $C\ \left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ e di una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1:

Impongo il passaggio del fascio per il punto $A\ (1;0)$:

$$2-3+k=0 \qquad k=1$$

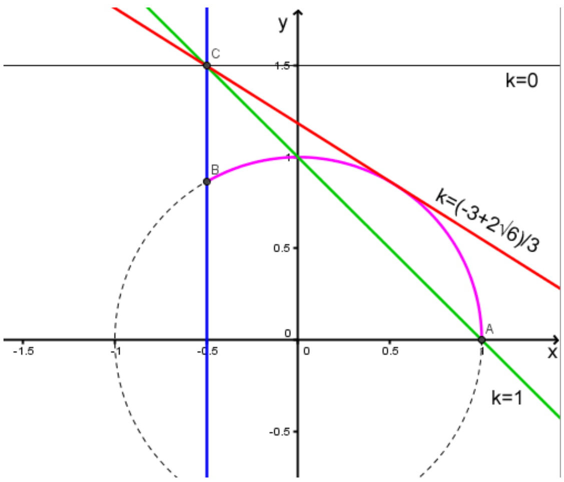
Impongo il passaggio del fascio per il punto $B\ \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$-k-3+\sqrt{3}+k=0 \qquad \nexists k\in\mathbb{R}$$

Trovo il valore di k per la tangente alla circonferenza, imponendo la distanza della generica retta del fascio dal centro della circonferenza uguale al raggio, cioè a 1:

$$\frac{|-3+k|}{2\sqrt{1+k^2}}=1 \qquad 9-6k+k^2=4+4k^2$$

$$3k^2+6k-5=0 \qquad k_{1,2}=\frac{-3\pm 2\sqrt{6}}{3}$$



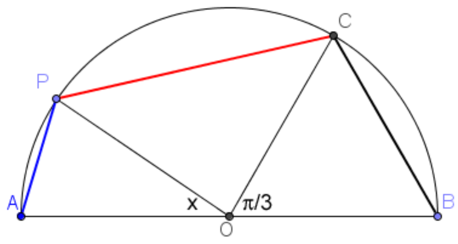
Ora posso determinare la soluzione:

$$\mathbf{1\ soluzione\ per\quad k\ge 1}$$

$$\mathbf{2\ soluzioni\ per\quad \frac{2\sqrt{6}-3}{3}\le k<1}$$

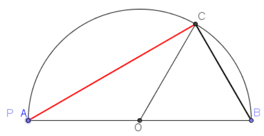
6. Sono dati una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e un punto C su di essa tale che $\overline{BC} = r$. Considera un punto P sull'arco AC in modo che risulti:

$$\overline{PC} + \overline{AP} = kr \qquad (k \in \mathbb{R}_o^+)$$



Considero innanzi tutto le due situazioni limite, dopo aver posto l'angolo $A\hat{O}P = x$:

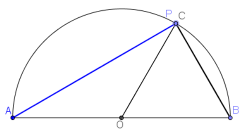
$x = 0$



$$\overline{PC} = \overline{AC} = 2r\ sen\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}r \qquad \overline{AP} = 0$$

$$\sqrt{3}r = kr \qquad k = \sqrt{3} \qquad acc.$$

$x = \frac{2}{3}\pi$



$$\overline{PC} = 0 \qquad \overline{AP} = \overline{AC} = 2r\ sen\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}r$$

$$\sqrt{3}r = kr \qquad k = \sqrt{3} \qquad acc.$$

Perciò: $\mathbf{0 \le x \le \frac{2}{3}\pi}$

Nel caso generale:
$\overline{AP} = 2r\ sen\frac{x}{2}$ perché l'angolo alla circonferenza sotteso dalla corda è metà dell'angolo al centro, x.
$\overline{PC} = 2r\ sen\frac{\pi - x - \frac{\pi}{3}}{2} = 2r\ sen\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{x}{2}\right)$ perché l'angolo alla circonferenza sotteso dalla corda è metà dell'angolo al centro.

Perciò:

$$2r\ \ sen\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{x}{2}\right) + 2r\ sen\frac{x}{2} = kr \qquad \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + sen\frac{x}{2} + 2sen\frac{x}{2} = k$$

Il sistema ottenuto è:

$$\begin{cases} \mathbf{3sen\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = k} \\ \mathbf{0 \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{3}} \end{cases}$$