Risolvi:

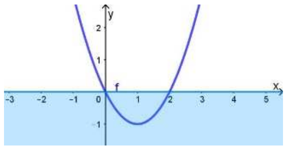
1. $\frac{x-3}{x^2-2x}+\frac{3}{2-x}\geq 1$

$$\frac{x-3}{x\,(x-2)}-\frac{3}{x-2}-1\geq 0 \qquad \frac{x-3-3x-x^2+2x}{x\,(x-2)}\geq 0 \qquad \frac{-x^2-3}{x\,(x-2)}\geq 0$$

$$\frac{x^2+3}{x\,(x-2)}\leq 0$$

Trattandosi di una somma di quadrati, il numeratore è sempre positivo, perciò il segno della frazione è determinato dal segno del denominatore (per il quale devo però escludere il valore 0):

$x^2-2x<0 \qquad x_1=0 \quad x_2=2$



$\boldsymbol{0<x<2}$

2. Scegli uno dei seguenti esercizi:

$$\frac{x^2\,(-36-x^2)}{(-x^2-x-1)(x^2+10x+25)}\leq 0 \qquad\qquad -2x\,(x-1)^3\,(x-3)^4<0$$

$$\frac{x^2\,(36+x^2)}{(x^2+x+1)(x+5)^2}\leq 0$$

Posso semplificare $36+x^2$, che è sicuramente positivo, in quanto somma di quadrati e x^2+x+1 che, in quanto falso quadrato, è sempre positivo. $(x+5)^2$ è sicuramente positivo, in quanto quadrato, purché diverso da zero, ovvero $x\neq -5$

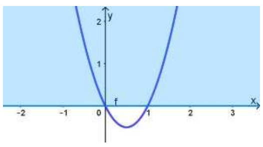
$x^2\leq 0 \qquad \boldsymbol{x=0}$

$$2x\,(x-1)^3\,(x-3)^4>0$$

Il cubo è positivo nel momento in cui la base è positiva, mentre la quarta potenza è sempre positiva, tranne quando la base è nulla, perciò, ponendo $x\neq 3$, la disequazione diventa:

$$2x\,(x-1)>0$$

$2x^2-2x<0 \qquad x_1=0 \quad x_2=1$



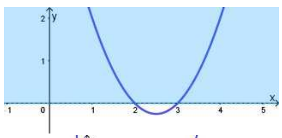
$\boldsymbol{x<0 \;\vee\; (x>1 \;\wedge\; x\neq 3)}$

3. Risolvi: $\begin{cases}|x^2-5x+3|<3\\ x^2-2x+19>0\end{cases}$

$|x^2-5x+3|<3 \qquad -3<x^2-5x+3<3 \qquad \begin{cases}x^2-5x+6>0\\ x^2-5x<0\end{cases}$

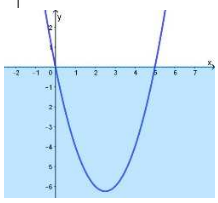
$x^2-5x+6>0$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\left\langle\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$$



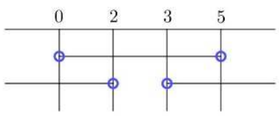
$x<2 \;\vee\; x>3$

$x^2-5x<0 \qquad x_1=0 \quad x_2=5$



$0<x<5$

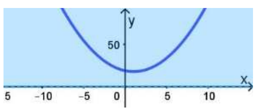
$\begin{cases}x<2 \;\vee\; x>3\\ 0<x<5\end{cases}$



$0<x<2 \;\vee\; 3<x<5$

Per quanto riguarda la seconda disequazione:

$\frac{\Delta}{4}=1-19<0$



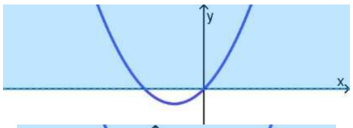
$\forall x\in\mathbb{R}$

Mettendo a sistema questo risultato con quello precedente, otteniamo: $\boldsymbol{0<x<2 \;\vee\; 3<x<5}$

4. Risolvi e discuti: $x^2 + ax > 0$

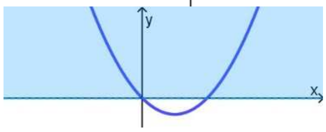
$$x\,(x + a) = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = -a$$

Se $a > 0$:



$\boldsymbol{x < -a \;\vee\; x > 0}$

Se $a < 0$:



$\boldsymbol{x < 0 \;\vee\; x > -a}$

Se $a = 0$: $x^2 > 0$ $\boldsymbol{x \neq 0}$

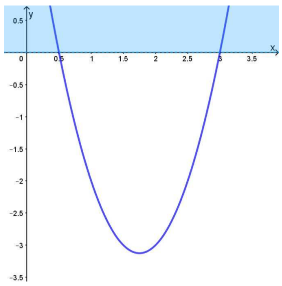
5. Determina per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, la frazione:

$$\frac{7k - k^2 - 1}{4 + 2k^2}$$

ha il denominatore maggiore del doppio del numeratore.

$$4 + 2k^2 > 2\,(7k - k^2 - 1) \qquad 2 + k^2 > 7k - k^2 - 1 \qquad 2k^2 - 7k + 3 > 0$$

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$



$$k < \frac{1}{2} \;\vee\; k > 3$$

Non dimentichiamo le condizioni di esistenza per il denominatore della frazione che però, essendo dato da una somma di quadrati, esiste sempre, perciò la soluzione è data da:

$$\boldsymbol{k < \frac{1}{2} \;\vee\; k > 3}$$