1. Nell'equazione $4x^2+4kx-2k-1=0$ determina il valore del parametro k per cui:
   A. le radici sono coincidenti;
   B. la somma dei reciproci delle radici è 1;
   C. il prodotto dei reciproci delle radici è 2;
   D. la somma dei quadrati delle radici è $5/4$.

   Determiniamo innanzi tutto le condizioni di accettabilità del parametro, ponendo il discriminante dell'equazione maggiore o uguale a zero:

$$\frac{\Delta}{4}=4k^2-4(-2k-1)\geq 0 \qquad 4k^2+8k+4\geq 0 \qquad 4(k+1)^2\geq 0 \quad \forall k\in\mathbb{R}$$

   A. Perché le radici siano coincidenti, il discriminante deve essere nullo, e questo si verifica se e solo se $\boldsymbol{k=-1}$.

   B. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1 \qquad \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1 \qquad \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=1 \qquad -\frac{b}{c}=1 \qquad -\frac{4k}{-2k-1}=1 \qquad \frac{4k}{2k+1}=1 \qquad \boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$

   C. $\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=2 \qquad x_1x_2=\frac{1}{2} \qquad \frac{-2k-1}{4}=\frac{1}{2} \qquad -2k-1=2 \qquad \boldsymbol{k=-\frac{3}{2}}$

   D. $x_1^2+x_2^2=\frac{5}{4} \qquad (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{5}{4} \qquad k^2-2\frac{-2k-1}{4}=\frac{5}{4}$

$$4k^2+4k-3=0 \qquad k_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4}\left\langle\begin{array}{l}=\frac{1}{2}\\[4pt]=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

2. Per l'acquisto di un regalo del costo di 175 € due persone, tra quelle che inizialmente avevano aderito, si ritirano; la spesa per ciascuno dei restanti aumenta pertanto di 10 €. Calcola quante persone avevano aderito inizialmente.

   Sia x il numero delle persone che avevano aderito inizialmente e y la quota stabilita inizialmente. Quando due persone si ritirano, il numero di persone diventa $x-2$ e la quota, aumentando di 10 €, diventa $y+10$. Perciò:

$$\begin{cases}xy=175\\(x-2)(y+10)=175\end{cases} \qquad \begin{cases}xy=175\\xy+10x-2y-20=175\end{cases} \qquad \begin{cases}5x-y-10=0\\xy=175\end{cases} \qquad \begin{cases}y=5x-10\\5x\,(x-2)=175\end{cases}$$

   Procedo con la soluzione della seconda equazione, risolvente del sistema, dopo aver diviso entrambi i membri per 5:

$$x^2-2x-35=0 \qquad x_{1,2}=1\pm 6=\left\langle\begin{array}{l}7\\-5\end{array}\right.$$

   Le persone che avevano aderito inizialmente sono **7**.

3. In una frazione il numeratore supera il denominatore di 3. Trova la frazione, sapendo che la somma della frazione stessa con il suo reciproco è $65/28$.

   Indico la frazione con $\frac{x+3}{x}$, visto che il numeratore supera il denominatore di 3. Pongo la somma tra la frazione e il suo reciproco uguale a 65/28:

$$\frac{x+3}{x}+\frac{x}{x+3}=\frac{65}{28} \qquad 28\,(x+3)^2+28x^2=65x(x+3)$$

$$28x^2+28\cdot 6x+28\cdot 9+28x^2-65x^2-65x\cdot 3=0$$

$$-9x^2+3x\,(56-65)+28\cdot 9=0$$

   Posso dividere entrambi i membri per -9, semplificando il calcolo:

$$x^2+3x-28=0 \qquad (x+7)(x-4)=0 \qquad \begin{array}{l}x_1=-7\\x_2=4\end{array}$$

   Le due frazioni sono: $\boldsymbol{\frac{7}{4}}$ e $\boldsymbol{\frac{-4}{-7}}$.

4. Dividi il numero 13 in due parti sapendo che il quadrato della prima parte diviso per la seconda dà per quoziente 12 e resto 4.

Indico le due parti in cui divido il numero 13 con x e $13-x$. La condizione posta, ricordando che $D = dQ + R$ (dove D è il dividendo, d è il divisore, Q è il quoziente e R il resto), diventa:

$$x^2 = 12(13-x)+4 \qquad x^2+12x-160=0 \qquad x_{1,2} = -6 \pm 14 = \Big\langle \begin{matrix} -20 \\ 8 \end{matrix}$$

La soluzione negativa non è accettabile. Le due parti in cui è diviso 13 sono **5** e **8**.

5. Trova tre numeri interi che siano multipli consecutivi di 3 e tali che la somma del quadrato del minore con il prodotto degli altri due sia 414.

Indico i tre numeri con $3x-3$, $3x$, $3x+3$. Ora posso ricostruire l'equazione:

$$(3x-3)^2+3x(3x+3)=414 \qquad 9(x-1)^2+9x(x+1)=9\cdot 46$$

$$x^2-2x+1+x^2+x-46=0 \qquad 2x^2-x-45=0 \qquad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+360}}{4} = \Bigg\langle \begin{matrix} 5 \\ -\frac{9}{2} \end{matrix}$$

Visto che devo determinare numeri interi, la seconda soluzione non è accettabile, perciò i tre numeri da determinare sono: $\mathbf{12}$, $\mathbf{15}$ e $\mathbf{18}$.

6. Trova l'età di una persona, sapendo che fra due anni la sua età sarà uguale al quadrato della quarta parte dell'età che aveva tre anni fa.

Indico con x l'età della persona oggi. Tra due anni la sua età sarà di $x+2$ anni e tre anni fa era $x-3$. L'equazione diventa:

$$x+2=\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 \qquad (x-3)^2-16(x+2)=0 \qquad x^2-6x+9-16x-32=0$$

$$x^2-22x-23=0 \qquad \begin{matrix} x_1=-1\ non\ acc. \\ x_2=23 \end{matrix}$$

L'età della persona è di **23** anni.

7. In un rettangolo la diagonale misura $\sqrt{41}\ cm$ e il perimetro $18\ cm$. Calcola l'area del rettangolo.

Indicando con x e y le dimensioni del rettangolo, l'area richiesta sarà data da xy.

Il perimetro è dato da: $2x+2y=18 \quad\Rightarrow\quad x+y=9$.

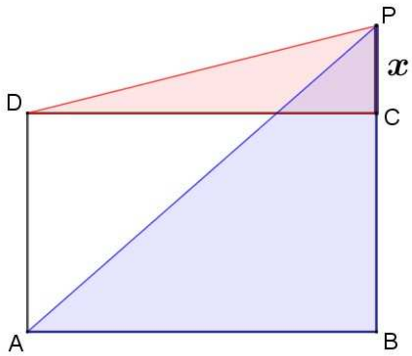
La diagonale del rettangolo si determina applicando il teorema di Pitagora e sapendo che la somma dei quadrati costruiti sui lati del rettangolo è equivalente al quadrato costruito sulla diagonale, ovvero: $x^2+y^2=41$.

Metto a sistema le due condizioni, ma non concludo la soluzione del sistema, visto che voglio determinare unicamente il prodotto tra le due dimensioni, ovvero l'area:

$$\begin{cases} x+y=9 \\ x^2+y^2=41 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=9 \\ (x+y)^2-2xy=41 \end{cases} \qquad 9^2-2xy=41 \qquad -2xy=41-81 \qquad xy=20$$

L'area del rettangolo è $\mathbf{20\ cm^2}$.

8. Un rettangolo $ABCD$ ha la base AB di $8\ cm$ e l'altezza BC di $5\ cm$. Sul prolungamento di BC dalla parte di C si prenda un punto P tale che la somma dei quadrati delle sue distanze dai quattro vertici del rettangolo sia $234\ cm^2$. Calcola la lunghezza di CP.



Indico il segmento CP con x.

Applico il teorema di Pitagora per determinare la distanza di P da A e da D:

$$\overline{PA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2 = 8^2 + (5+x)^2 \qquad \overline{PD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CP}^2 = 8^2 + x^2$$

Per le distanze di P da C e da B è più semplice:

$$\overline{PC} = x \qquad \overline{PB} = x + 5$$

La somma dei quadrati delle distanze dai quattro vertici è data da:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 234$$

Sostituendo ai quadrati quanto appena determinato in funzione di x, ottengo l'equazione risolutiva:

$$8^2 + (5+x)^2 + (x+5)^2 + x^2 + 8^2 + x^2 = 234$$

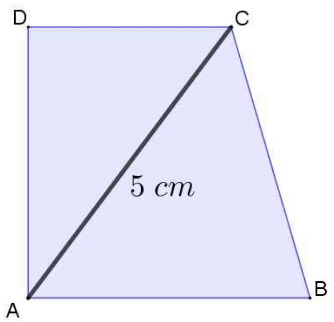
$$64 + 25 + 10x + x^2 + x^2 + 10x + 25 + x^2 + 64 + x^2 = 234 \qquad 4x^2 + 20x - 56 = 0$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-5 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{matrix} -7 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

Trattandosi di un segmento, l'unica soluzione accettabile è 2, perciò: $\boldsymbol{\overline{CP} = 2\ cm}$.

9. Risolvi uno dei seguenti problemi:

A. Determina la lunghezza dei lati di un trapezio rettangolo, di area $\frac{43}{3}\ cm^2$, sapendo che la diagonale minore è lunga $5\ cm$ e che l'altezza supera di $1\ cm$ la base minore.



Indico: $\overline{DC} = x$ e $\overline{AD} = x + 1$ e applico il teorema di Pitagora al triangolo ACD:

$$\overline{DC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 \qquad x^2 + (x+1)^2 = 25 \qquad x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{matrix} -4 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

L'unica soluzione accettabile è quella positiva, trattandosi di lunghezze di segmenti, perciò:

$$\boldsymbol{\overline{DC} = 3\ cm} \qquad \boldsymbol{\overline{AD} = 4\ cm}$$

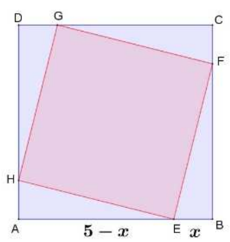
Posso ora porre l'area uguale a quella data, ponendo la base maggiore $\overline{AB} = x$:

$$A = \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{AD}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{43}{3} = \frac{4\,(x+3)}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{43}{6} - 3 = \frac{25}{6}$$

In altre parole: $\boldsymbol{\overline{AB} = \frac{25}{6}\ cm}$. Ora posso determinare il lato obliquo applicando il teorema di Pitagora:

$$\overline{AB} - \overline{DC} = \overline{HB} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\overline{CB}} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{HB}^2} = \boldsymbol{\frac{25}{6}\, cm}$$

B. Inscrivi in un quadrato di lato $5\ cm$ un altro quadrato la cui area sia $\frac{17}{25}$ dell'area del quadrato dato. Determina le due parti in cui il vertice del secondo quadrato divide il lato del primo quadrato.



Considero il quadrato ABCD di lato 5 cm e il lato EFGH in esso inscritto, che forma quattro triangoli:

$$EBF \cong FCG \cong GDH \cong HAE$$

Questi triangoli hanno un'area pari a $\frac{8}{25}$ dell'area del quadrato, ovvero i quattro triangoli insieme hanno area $8\ cm^2$ e uno solo dei triangoli ha area $2\ cm^2$. Indicando con x e $5 - x$ le due parti in cui il vertice del secondo quadrato divide il lato del primo quadrato, ovvero i cateti dei triangoli indicati (come riportato sulla figura), possiamo porre l'area del singolo triangolo uguale a 2 e risolvere l'equazione:

$$\frac{x(5-x)}{2} = 2 \qquad 5x - x^2 = 4 \qquad x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right. \qquad \boldsymbol{\overline{AE} = 4\ cm} \quad \boldsymbol{\overline{EB} = 1\ cm}$$