Risolvi:

1. $\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x-2}+\frac{8}{4-x^2}>0$

$$\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x-2}-\frac{8}{(x-2)(x+2)}>0 \qquad \frac{x^2-2x+4x+8-8}{(x-2)(x+2)}>0 \qquad \frac{x^2+2x}{(x-2)(x+2)}>0$$

$$\frac{x\,(x+2)}{(x-2)(x+2)}>0$$ Possiamo semplificare $x+2$, purché ricordiamo che $x \neq -2$ $$\frac{x}{x-2}>0$$

$N>0:\quad x>0$
$D>0:\quad x>2$

	-2	0	2	
$-$	$-$	$+$	$+$	
$-$	$-$	$-$	$+$	
$+$	$+$	$-$	$+$	

$\boldsymbol{(x<0 \quad \wedge \quad x\neq -2) \quad \vee \quad x>2}$

2. Scegli uno dei seguenti esercizi:

$$\frac{(2x^2+4x+2)(-x^2-25)}{(3x+4)^2\,(-5x-6)^3}<0 \qquad\qquad -4x\,(x-5)^5(x+2)^6<0$$

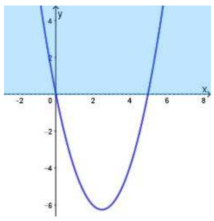
$$\frac{(x+1)^2(x^2+25)}{(3x+4)^2\,(5x+6)^3}<0$$

Posso semplificare x^2+25, che è sicuramente positivo, in quanto somma di quadrati mentre i due quadrati sono positivi purché siano diversi da zero, ovvero: $x\neq -1 \quad \wedge \quad x\neq -\frac{4}{3}$
Resta quindi il cubo, che determina il segno della frazione e, quindi, deve avere la base negativa:

$5x+6<0 \qquad \boldsymbol{x<-\frac{6}{5} \quad \wedge \quad x\neq -\frac{4}{3}}$

$$4x\,(x-5)^5\,(x+2)^6>0$$

La quinta potenza è positiva nel momento in cui la base è positiva, mentre la sesta potenza è sempre positiva, tranne quando la base è nulla, perciò, ponendo $x\neq -2$, la disequazione diventa:



$x\,(x-5)>0$

$x^2-5x>0 \qquad x_1=0 \quad x_2=5$

$\boldsymbol{(x<0 \quad \wedge \quad x\neq -2) \quad \vee \quad x>5}$

Risolvi:

3. $\begin{cases} \frac{1}{x^2+4x+4}>0 \\ \frac{3x}{-x^2-5}>0 \end{cases}$

$$\frac{1}{(x+2)^2}>0 \qquad\qquad x\neq -2$$

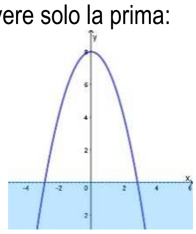
$$\frac{3x}{x^2+5}<0$$ Il denominatore è sempre positivo in quanto somma di due quadrati $\qquad x<0$

$\begin{cases} x\neq -2 \\ x<0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x<0 \quad \wedge \quad x\neq -2}$

4. $|4-x^2|\geq 4$

$4-x^2<-4 \qquad \vee \qquad 4-x^2>4$
$8-x^2<0 \qquad \vee \qquad x^2<0$

Siccome la seconda disequazione è impossibile, resta da risolvere solo la prima:



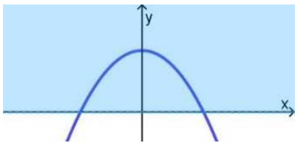
$x_{1,2}=\pm 2\sqrt{2}$

$\boldsymbol{x<-2\sqrt{2} \quad \vee \quad x>2\sqrt{2}}$

5. Risolvi e discuti: $ax^2+1>0$

Se $a>0$: Si tratta di una somma di quadrati, quindi sempre positiva $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

Se $a<0$: $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{1}{a}}$



$$-\sqrt{-\frac{1}{a}}<x<\sqrt{-\frac{1}{a}}$$

Se $a=0$: $1>0$ $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

6. Determina per quali valori di k la somma delle radici dell'equazione:

$$(1+k^2-2k)\,x^2+(4k-9)\,x+4=0$$

è maggiore di 1.

La somma delle radici, in un'equazione di secondo grado, è data dall'opposto del rapporto tra il coefficiente del termine di primo grado e il coefficiente del termine di secondo grado:

$$-\frac{4k-9}{1+k^2-2k}>1 \qquad \frac{9-4k}{(k-1)^2}-1>0 \qquad \frac{9-4k-1-k^2+2k}{(k-1)^2}>0 \qquad \frac{k^2+2k-8}{(k-1)^2}<0$$

Dobbiamo richiedere che l'equazione sia di secondo grado e quindi con il coefficiente del termine di secondo grado diverso da zero, ma questo è garantito dal fatto che il denominatore della frazione di cui stiamo studiando il segno sia diverso da zero.
Dobbiamo però aggiungere la condizione $\Delta \geq 0$ perché le soluzioni siano reali:

$$\Delta=(4k-9)^2-16\,(1+k^2-2k)=16k^2-72k+81-16-16k^2+32k=-40k+65\geq 0$$

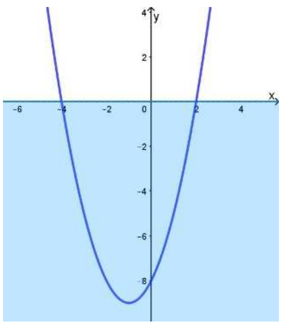
$$k\leq\frac{65}{40} \qquad k\leq\frac{13}{8}$$

La condizione posta dal problema diventa quindi:

$$\begin{cases}\dfrac{k^2+2k-8}{(k-1)^2}<0\\ k\leq\dfrac{13}{8}\end{cases}$$

$k^2+2k-8<0 \quad \wedge \quad k\neq 1$

$k_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+8}=\langle\begin{matrix}2\\-4\end{matrix}$



$-4<k<2 \quad \wedge \quad k\neq 1$

Mettendo a sistema i due risultati, otteniamo:

$$-4<k\leq\frac{13}{8} \quad \wedge \quad k\neq 1$$