1. Nell'equazione $(3k-1)\,x^2+(3k-4)\,x-2(3k+2)=0$ determina il valore del parametro k per cui:
   A. le radici siano coincidenti;
   B. le radici siano reali e distinte;
   C. una radice sia nulla;
   D. la somma delle radici sia -1;
   E. la somma dei reciproci delle radici sia $5/4$;
   F. la somma dei quadrati delle radici sia uguale a $5/2$ del loro prodotto.

A. Perché le radici siano coincidenti, il discriminante deve essere nullo. Procedo, quindi, al calcolo del discriminante:

$$\Delta=(3k-4)^2+8(3k-1)(3k+2)=0 \qquad 9k^2-24k+16+72k^2+24k-16=0 \qquad \Delta=81k^2 \qquad \boldsymbol{k=0}$$

B. Perché le radici siano reali e distinte: $\Delta>0$, cioè, visto il calcolo precedente: $81k^2>0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{k\neq 0}$

C. Perché una radice sia nulla, il termine noto deve essere nullo, perciò: $-2(3k+2)=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{k=-\frac{2}{3}}$

D. $x_1+x_2=-1 \quad\Rightarrow\quad -\frac{b}{a}=-1 \quad\Rightarrow\quad b=a \quad\Rightarrow\quad 3k-4=3k-1 \quad\Rightarrow\quad \nexists \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$

E. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad 4(x_1+x_2)=5x_1x_2 \quad\Rightarrow\quad 4\left(-\frac{b}{a}\right)=5\frac{c}{a} \quad\Rightarrow\quad -4b=5c$

$$\Rightarrow\quad -4(3k-4)=-10(3k+2) \quad\Rightarrow\quad 6k-8=15k+10 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{k=-2}$$

F. $x_1^2+x_2^2=\frac{5}{2}x_1x_2 \quad\Rightarrow\quad (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{5}{2}x_1x_2 \quad\Rightarrow\quad (x_1+x_2)^2=\frac{9}{2}x_1x_2 \quad\Rightarrow\quad \left(-\frac{b}{a}\right)^2=\frac{9}{2}\frac{c}{a}$

$$\left(\frac{3k-4}{3k-1}\right)^2=\frac{-18(3k+2)}{2(3k-1)} \quad\Rightarrow\quad (3k-4)^2=-9(3k+2)(3k-1) \quad\Rightarrow\quad 9k^2-24k+16=-81k^2-27k+18$$

$$90k^2+3k-2=0 \qquad k_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+720}}{180}\left\langle\begin{array}{l}=-\boldsymbol{\frac{1}{6}}\\ =\boldsymbol{\frac{2}{15}}\end{array}\right.$$

2. Una frazione a termini positivi è equivalente a $4/3$. Trova la frazione, sapendo che la differenza tra il quadrato del numeratore e il quadrato del denominatore è 112.

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: numeratore della frazione
$\boldsymbol{y}$: denominatore della frazione

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{4}{3}\\ x^2-y^2=112\end{cases} \qquad con\ x>0\ e\ y>0$$

$$\begin{cases}x=\frac{4}{3}y\\ \left(\frac{4}{3}y\right)^2-y^2=112\end{cases} \qquad \frac{16}{9}y^2-y^2=112 \qquad \frac{7}{9}y^2=112 \qquad y^2=16\cdot 9 \qquad y=\left\langle\begin{array}{l}12\\ [-12]\end{array}\right. \qquad \begin{cases}x=16\\ y=12\end{cases} \qquad F=\boldsymbol{\frac{16}{12}}$$

3. La somma dei quadrati di due numeri interi positivi è 40 e il quadrato della loro somma supera di 16 il triplo del quadrato della loro differenza. Determina i due numeri.

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: primo numero
$\boldsymbol{y}$: secondo numero

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

$$\begin{cases}x^2+y^2=40\\ (x+y)^2=16+3(x-y)^2\end{cases}$$

$\begin{cases} x^2+y^2=40 \\ x^2+y^2+2xy=16+3(x^2+y^2-2xy) \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=40 \\ 40+2xy=16+3(40-2xy) \end{cases}$ $\begin{cases} 8xy=16+120-40 \\ (x+y)^2=40+24 \end{cases}$

$\begin{cases} xy=12 \\ x+y=8 \end{cases}$ $z^2-8z+12=0$ $z_{1,2}=4\pm 2$ $\mathbf{(6,2)}$

4. Trova due numeri tali che la somma del primo con il doppio del secondo sia 27 e che la somma del doppio del quadrato del primo con il quadrato del secondo sia 198.

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: primo numero
$\boldsymbol{y}$: secondo numero

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

$$\begin{cases} x+2y=27 \\ 2x^2+y^2=198 \end{cases}$$

$\begin{cases} x=27-2y \\ 2(729-108y+4y^2)+y^2=198 \end{cases}$ $9y^2-216y+1260=0$ $y^2-24y+140=0$

$y_{1,2}=12\pm 2$ $\mathbf{(-1,14)}$ $\mathbf{(7,10)}$

5. Determina due monomi, funzioni della variabile a, sapendo che la loro somma è $-\frac{14}{3}a$ e che il loro prodotto è $-\frac{5}{3}a^2$.

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: primo monomio
$\boldsymbol{y}$: secondo monomio

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

$$\begin{cases} x+y=-\dfrac{14}{3}a \\ xy=-\dfrac{5}{3}a^2 \end{cases}$$

$z^2+\frac{14}{3}az-\frac{5}{3}a^2=0$ $3z^2+14az-5a^2=0$ $z_{1,2}=\frac{-7a\pm 8a}{3}$ $\boldsymbol{\left(-5a,\frac{1}{3}a\right)}$

6. Calcola il perimetro di un rettangolo, sapendo che l'area è $108\ cm^2$ e che la diagonale è $15\ cm$.

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: base del rettangolo
$\boldsymbol{y}$: altezza del rettangolo

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

ottengo la seconda equazione applicando il teorema di Pitagora:

$$\begin{cases} xy=108 \\ x^2+y^2=15^2 \end{cases}$$

$\begin{cases} xy=108 \\ (x+y)^2-2xy=15^2 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=108 \\ (x+y)^2=225+216 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=108 \\ x+y=\pm 21 \end{cases}$

Dato che x e y sono le misure delle dimensioni del rettangolo, dovranno essere necessariamente entrambe positive, perciò $x+y=21$. Considerando che devo calcolare solo il perimetro e che ho già ottenuto la somma di base e altezza, moltiplicando per 2 ho il perimetro del rettangolo, ovvero: $\mathbf{42\ cm}$.

7. In un triangolo isoscele la misura del lato supera di $8a$ i $3/4$ di quella dell'altezza relativa alla base. Sapendo che il perimetro misura $64\ a$, determina la misura dell'area del triangolo.

Numero di incognite scelte: **3**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: lato obliquo del triangolo
$\boldsymbol{y}$: altezza del triangolo
$\boldsymbol{z}$: metà base del triangolo

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

ottengo la terza equazione applicando il teorema di Pitagora:

$$\begin{cases} x = 8a + \dfrac{3}{4}y \\ 2x + 2z = 64a \\ y^2 + z^2 = x^2 \end{cases}$$

Ricavo la x dalla prima equazione e la sostituisco nelle altre due. In questo modo, ricordando che l'area del triangolo in questo caso si ottiene facendo: $\frac{1}{2}y \cdot 2z = yz$, posso ricavare le due dimensioni necessarie per il calcolo:

$$\begin{cases} 16a + \dfrac{3}{2}y + 2z = 64a \\ y^2 + z^2 = 64a^2 + 12ay + \dfrac{9}{16}y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -\dfrac{3}{4}y + 24a \\ y^2 + \dfrac{9}{16}y^2 - 36ay + 576a^2 = 64a^2 + 12ay + \dfrac{9}{16}y^2 \end{cases}$$

$$y^2 - 48ay + 512a^2 = 0 \qquad y_{1,2} = 24a \pm 8a \qquad \begin{cases} y = 32a \\ z = 0 \end{cases} \ non\ acc. \qquad \begin{cases} y = 16a \\ z = 12\ a \end{cases}$$

Posso determinare l'area, come precedentemente indicato, ottenendo: $\boldsymbol{192\ a^2}$.