1. Nell'equazione $(k-2)\,x^2-(6k-1)\,x+5k+1=0$ determina il valore del parametro k in modo che:
   A. le radici siano coincidenti;
   B. le radici siano opposte;
   C. le radici siano una l'opposto del reciproco dell'altra;
   D. il doppio del prodotto delle radici sia uguale alla loro somma;
   E. la somma dei reciproci delle radici sia uguale a 3;
   F. la somma dei quadrati delle radici sia uguale a 2.

A. Perché le radici siano coincidenti, il discriminante deve essere nullo. Procedo, quindi, al calcolo del discriminante:

$$\Delta=(6k-1)^2-4(5k+1)(k-2)=0 \qquad 36k^2-12k+1-20k^2+36k+8=0$$

$$16k^2+24k+9=0 \qquad \Delta=(4k+3)^2=0 \qquad \boldsymbol{k=-\frac{3}{4}}$$

Incidentalmente, posso anche notare che l'equazione è risolvibile $\forall k\in\mathbb{R}$.

B. Perché le radici siano opposte, la loro somma deve essere nulla, perciò $b=0 \quad \Rightarrow \quad 6k-1=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=\frac{1}{6}}$

C. $x_1=-\frac{1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1x_2=-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{a}=-1 \quad \Rightarrow \quad c=-a \quad \Rightarrow \quad 5k+1=-k+2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=\frac{1}{6}}$

D. $2x_1x_2=x_1+x_2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{a}=2\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad -b=2c \quad \Rightarrow \quad 6k-1=10\,k+2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=-\frac{3}{4}}$

E. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=3 \quad \Rightarrow \quad x_1+x_2=3x_1x_2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{b}{a}=3\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad -b=3c$

$$\Rightarrow \quad 6k-1=3\,(5k+1) \quad \Rightarrow \quad 6k-1=15\,k+3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=-\frac{4}{9}}$$

F. $x_1^2+x_2^2=2 \quad \Rightarrow \quad (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2 \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{6k-1}{k-2}\right)^2-2\frac{5k+1}{k-2}=2$

$$\Rightarrow \quad (6k-1)^2-2(5k+1)(k-2)=2(k-2)^2 \quad \Rightarrow \quad 36k^2-12k+1-10k^2+18k+4=2k^2-8k+8$$

$$24k^2+14k-3=0 \qquad k_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{24}\left\langle\begin{array}{l}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}\\[4pt] =\boldsymbol{-\frac{3}{4}}\end{array}\right.$$

2. Determina due numeri negativi, sapendo che il valore assoluto della loro somma è 12 e che la differenza dei loro quadrati è 24.

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: primo numero, $x<0$
$\boldsymbol{y}$: secondo numero, $y<0$

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

$$\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2-y^2=24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-12 \\ (x+y)(x-y)=24 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-12 \\ -12(x-y)=24 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{cases} x+y=-12 \\ x-y=-2 \end{cases} \\ \hline 2x=-14 \end{array} \qquad \boldsymbol{\begin{cases} x=-7 \\ y=-5 \end{cases}}$$

3. Determina le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa misura 10 m e l'altezza ad essa relativa misura 4,8 m.

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: primo cateto
$\boldsymbol{y}$: secondo cateto

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

ottengo la prima equazione applicando il teorema di Pitagora:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10^2 \\ \dfrac{xy}{2}=\dfrac{10\cdot 4,8}{2} \end{cases} \qquad con\ x>0\ e\ y>0$$

$\begin{cases} x^2+y^2=10^2 \\ xy=48 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=10^2 \\ xy=48 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2=196 \\ xy=48 \end{cases}$ $ricordo\ che\ x+y>0$

$\begin{cases} xy=48 \\ x+y=14 \end{cases}$ $z^2-14z+48=0$ $z_{1,2}=7\pm1$ $\mathbf{(6,8)}$

4. Trova due numeri interi sapendo che la loro somma è 27 e che il quadrato del maggiore supera di 45 il loro prodotto.

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: numero maggiore
$\boldsymbol{y}$: numero minore

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

$$\begin{cases} x+y=27 \\ x^2=45+xy \end{cases} \quad con\ x,y\in\mathbb{Z}$$

$\begin{cases} y=27-x \\ x^2=45+x(27-x) \end{cases}$ $x^2=45+27x-x^2$ $2x^2-27x-45=0$

$$x_{1,2}=\frac{27\pm\sqrt{729+360}}{4}=\frac{27\pm33}{4}=\left\langle\begin{matrix}15\\ \left[-\frac{3}{2}\right]\end{matrix}\right. \qquad \mathbf{(15,12)}$$

5. Determina due binomi, funzioni della variabile a, sapendo che la loro somma è $5a$ e che la somma dei loro quadrati è $13a^2+2a+2$.

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: primo binomio
$\boldsymbol{y}$: secondo binomio

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

$$\begin{cases} x+y=5a \\ x^2+y^2=13\,a^2+2a+2 \end{cases}$$

$\begin{cases} x+y=5a \\ (x+y)^2-2xy=13a^2+2a+2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5a \\ xy=6a^2-a-1 \end{cases}$ $z^2-5az+6a^2-a-1=0$

$$z_{1,2}=\frac{5a\pm\sqrt{25\,a^2-24a^2+4a+4}}{2}=\frac{5a\pm(a+2)}{2} \qquad \mathbf{(3a+1,2a-1)}$$

6. In un triangolo isoscele l'area è di $300\ cm^2$ e il lato è lungo $25\ cm$. Determina la lunghezza del perimetro.

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: base del triangolo
$\boldsymbol{2y}$: altezza del triangolo

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

ottengo la seconda equazione applicando il teorema di Pitagora:

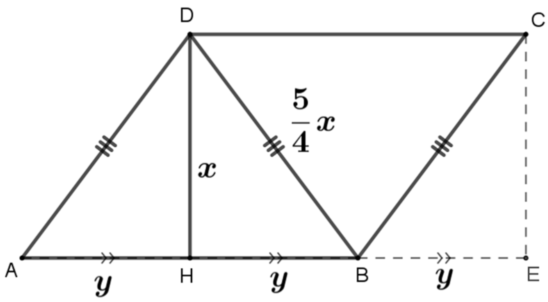
$$\begin{cases} \dfrac{x\cdot 2y}{2}=300 \\ x^2+y^2=25^2 \end{cases} \quad con\ x>0\ e\ y>0$$

$\begin{cases} xy=300 \\ (x+y)^2-2xy=25^2 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=300 \\ (x+y)^2=625+600 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=300 \\ x+y=\pm35 \end{cases}$

Dato che x e y sono le misure delle dimensioni del rettangolo, dovranno essere necessariamente entrambe positive, perciò $x+y=35$.

$z^2-35z+300=0$ $\quad z_{1,2}=\frac{35\pm\sqrt{1225-1200}}{2}=\frac{35\pm5}{2}=\left\langle\begin{matrix}20\\15\end{matrix}\right.$ $\quad \mathbf{2p_1=90\ cm} \quad \mathbf{2p_2=80\ cm}$

7. Nel parallelogramma ABCD la diagonale minore BD è congruente al lato AD che, a sua volta, è $\frac{5}{4}$ dell'altezza DH relativa al lato AB. Determina la misura dei lati, sapendo che è verificata la relazione $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 122\,a^2$.



Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo AEC:

$$\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2$$

Numero di incognite scelte: **2**

Indica a cosa si riferiscono le incognite (nel caso in cui tu non le abbia già indicate nel disegno):

$\boldsymbol{x}$: altezza del parallelogramma
$\boldsymbol{y}$: metà base del parallelogramma

Equazione/sistema che formalizza il problema posto:

ottengo la prima equazione applicando il teorema di Pitagora a HBD:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{25}{16}x^2 \\ (3y)^2 + x^2 + \dfrac{25}{16}x^2 = 122\,a^2 \end{cases} \qquad con\ x > 0\ e\ y > 0$$

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{9}{16}x^2 \\ \dfrac{81}{16}x^2 + x^2 + \dfrac{25}{16}x^2 = 122\,a^2 \end{cases} \qquad \frac{61}{8}x^2 = 122\,a^2 \qquad x^2 = 16\,a^2 \qquad x = \left\langle \begin{matrix} 4a \\ [-4a] \end{matrix} \right.$$

Posso determinare le misure dei lati: $\overline{AD} = \frac{5}{4}x = \boldsymbol{5a}$ e $\overline{AB} = 2y = 2\sqrt{\frac{9}{16}x^2} = \boldsymbol{6a}$.