1. $\sqrt{x^2-4}<x$

$$\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x^2-4<x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq -2 \quad \vee \quad x\geq 2 \\ x\geq 0 \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \qquad \boldsymbol{x\geq 2}$$

2. $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+2}}-\sqrt[3]{x}\geq 0$

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}\geq\sqrt[3]{x} \qquad \frac{x-1}{x+2}\geq x \qquad \frac{x-1-x\,(x+2)}{x+2}\geq 0 \qquad \frac{x-1-x^2-2x}{x+2}\geq 0$$

$$\frac{-x^2-x-1}{x+2}\geq 0 \qquad \frac{x^2+x+1}{x+2}\leq 0$$

Il numeratore è sempre positivo, perché si tratta di un falso quadrato, perciò: $x+2<0$ $\boldsymbol{x<-2}$

3. $\sqrt{5-x+x^2}>x$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 5-x+x^2>x^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 5-x+x^2\geq 0 \\ x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x<5 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \\ x<0 \end{cases}$$

$$0\leq x<5 \quad \vee \quad x<0$$

$$\boldsymbol{x<5}$$

4. $\dfrac{x+1}{1-\sqrt{x^2-3}}<0$

$$\begin{cases} x^2-3\geq 0 \\ \dfrac{x+1}{1-\sqrt{x^2-3}}<0 \end{cases}$$

La prima disequazione del sistema ha soluzione: $x\leq-\sqrt{3} \quad \vee \quad x\geq\sqrt{3}$. Per la seconda disequazione

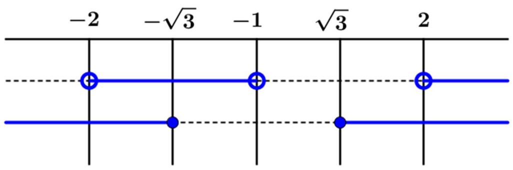
$$N>0: \qquad x>-1$$

$$D>0: \qquad 1-\sqrt{x^2-3}>0 \qquad \sqrt{x^2-3}<1$$

possiamo ignorare le condizioni di esistenza (già presenti nel sistema) e procedere elevando a quadrato entrambi i membri, perciò:

$$x^2-3<1 \qquad -2<x<2$$

Studiando i segni della disequazione fratta, otteniamo: $-2<x<-1 \quad \vee \quad x>2$. Risolviamo il sistema iniziale:




$$\boldsymbol{-2<x\leq-\sqrt{3} \quad \vee \quad x>2}$$

5. $\begin{cases} x^2+y^2-3x+2y+3=0 \\ x^2+y^2-2x-y+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2-3x+2y+3=0 \\ x-3y-2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3y+2 \\ 9y^2+12y+4+y^2-9y-6+2y+3=0 \end{cases}$

$10y^2+5y+1=0$ $\Delta=25-40<0$ $\boldsymbol{\nexists y \in \mathbb{R}}$

6. $\begin{cases} x+y\sqrt{2}-3\sqrt{2}=0 \\ 5y^2-x^2+3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-y\sqrt{2}+3\sqrt{2} \\ 5y^2-2y^2-18+12y+3=0 \end{cases}$ $y^2+4y-5=0$ $y_{1,2}=-2\pm 3=\left\langle \begin{matrix} 1 \\ -5 \end{matrix}\right.$

$\begin{cases} \boldsymbol{x_1=2\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y_1=1} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x_2=8\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y_2=-5} \end{cases}$

7. Trova due numeri razionali tali che la loro somma sia $\frac{7}{6}$ e la somma dei loro reciproci sia $\frac{7}{2}$.

Indico con x e y i due numeri:

$\begin{cases} x+y=\frac{7}{6} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=\frac{7}{6} \\ \frac{x+y}{xy}=\frac{7}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=\frac{7}{6} \\ xy=\frac{1}{3} \end{cases}$

$t^2-\frac{7}{6}t+\frac{1}{3}=0$ $6t^2-7t+2=0$ $t_{1,2}=\frac{7\pm 1}{12}=\left\langle \begin{matrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right.$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{2}{3}} \\ \boldsymbol{y=\frac{1}{2}} \end{cases}$

8. Il perimetro di un rombo è 212 cm e l'area è 2520 cm$^2$. Determina le lunghezze delle diagonali.

Indico le due diagonali con 2x e 2y:

$\begin{cases} \frac{2x\cdot 2y}{2}=2520 \\ x^2+y^2=\left(\frac{212}{4}\right)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=1260 \\ (x+y)^2-2xy=53^2 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=1260 \\ (x+y)^2=5329 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=1260 \\ x+y=\pm 73 \end{cases}$

Considerato che si tratta di misure di lunghezza, escludo il caso $x+y=-73$. L'equazione associata al sistema simmetrico è :

$t^2-73t+1260=0$ $t_{1,2}=\frac{73\pm 17}{2}=\left\langle \begin{matrix} 45 \\ 28 \end{matrix}\right.$ $\begin{cases} \boldsymbol{D=90\ cm} \\ \boldsymbol{d=56\ cm} \end{cases}$