1. Un solido è formato da un cilindro e da un cono equivalenti fra loro, aventi la base coincidente. Sapendo che la somma del raggio e dell'altezza del cono è di 34 cm e che il raggio è 5/12 dell'altezza, calcola l'area della superficie totale del solido.

Per ipotesi, il cono e il cilindro sono equivalenti, ovvero hanno lo stesso volume. Inoltre, hanno anche la base coincidente, perciò eguagliando i volumi, troviamo la relazione tra le due altezze ($\overline{BH}$ per il cono e $\overline{CD}$ per il cilindro).

$$V_{cono} = V_{cilindro} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi r^2\, \overline{BH} = \pi r^2\, \overline{CD} \quad \Rightarrow \quad \overline{BH} = 3\,\overline{CD} = 3\,h$$

Dalle relazioni date, possiamo costruire il sistema per determinare altezza e raggio:

$$\begin{cases} 3h + r = 34 \\ r = \dfrac{5}{12}\,3h \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{17}{4}\,h = 34 \\ r = \dfrac{5}{4}h \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h = \overline{CD} = 8\,cm \\ r = \overline{AH} = 10\,cm \end{cases}$$

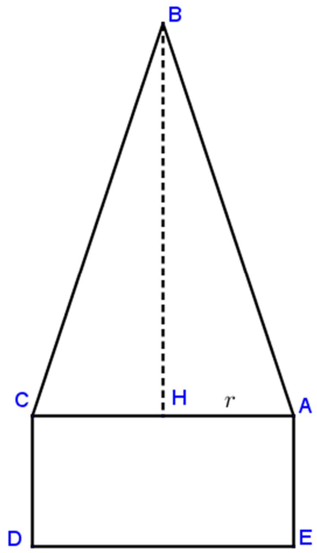
E, per quanto detto prima, possiamo determinare l'altezza della piramide:

$$\overline{BH} = 3\,h = 24\,cm$$

Applicando il teorema di Pitagora, determino l'apotema a del cono e poi si può calcolare la superficie totale, data dalla somma della superficie laterale del cono, con la superficie laterale del cilindro e un'area di base del cilindro:

$$a = \overline{AB} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{HA}^2} = 26\,cm$$

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h + \pi r a = \mathbf{520\,\pi\,cm^2}$$



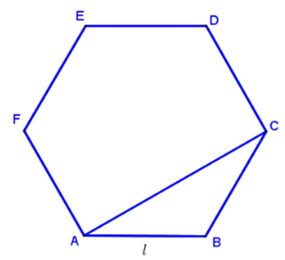
2. Un prisma retto ha per base l'esagono regolare ABCDEF e l'altezza del prisma è congruente al segmento AC. La superficie totale del prisma è $900\sqrt{3}\,cm^2$. Determinane il volume.

L'area totale del prisma è data dalle due aree di base sommate all'area laterale:

$$A_t = 2\,A_b + A_l = 2 \cdot 6\,A_{AOB} + 2p\,H = 12\,A_{AOB} + 6\,l\,\overline{AC}$$

Determino la misura della diagonale AC con il teorema del coseno applicato al triangolo ABC, conoscendo i lati dell'esagono e l'angolo tra essi compreso (120°):

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB}\,\overline{BC}\cos A\hat{B}C} = \sqrt{l^2 + l^2 + 2\,l^2\frac{1}{2}} = l\sqrt{3}$$



Determino l'area del triangolo AOB, con O centro della circonferenza circoscritta all'esagono, visto che l'esagono è costituito da sei triangoli equilateri:

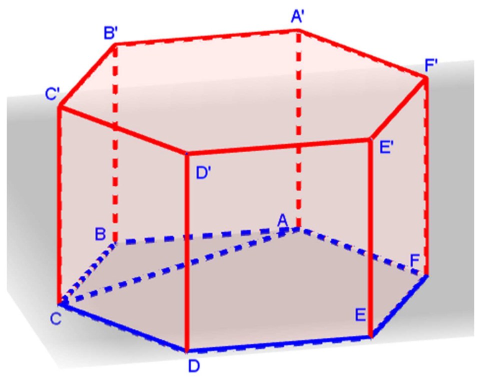
$$A_{AOB} = \frac{1}{2}l \cdot l \cdot sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

A questo punto posso determinare l'area totale in funzione del lato di base l:

$$A_t = 3\sqrt{3}\,l^2 + 6\sqrt{3}\,l^2 = 9l^2\sqrt{3}$$

E pongo l'area così determinata uguale a quella fornita nel testo:

$$9l^2\sqrt{3} = 900\sqrt{3}\,cm^2 \quad \Rightarrow \quad l = 10\,cm \quad \Rightarrow \quad H = \overline{AC} = l\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\,cm$$



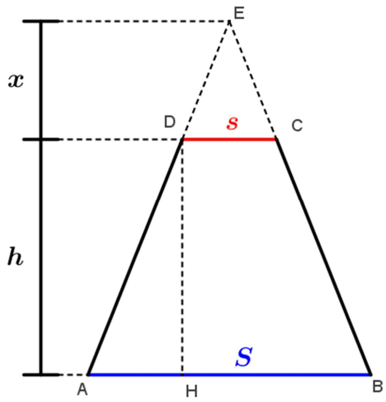
Ora ho tutti i dati per determinare il volume del prisma:

$$V = A_b H = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,l^2 \cdot l\sqrt{3} = \frac{9}{2}\,l^3 = \mathbf{4500\,cm^3}$$

3. Le aree della base maggiore e della base minore di un tronco di piramide sono, rispettivamente, 225 dm^2 e 100 dm^2, e l'altezza del tronco è 25 dm. Determina l'altezza della piramide da cui il tronco è tagliato e il rapporto tra il volume della piramide e il volume del tronco.

In un tronco di piramide, le misure delle superfici di base sono proporzionali ai quadrati delle misure delle distanze dei piani dal vertice E:

$$S : s = (h+x)^2 : x^2$$



In una proporzione, il prodotto tra i medi è uguale al prodotto tra gli estremi, perciò:

$$Sx^2 = s\,(h+x)^2 \quad \Rightarrow \quad x\sqrt{S} = (h+x)\sqrt{s} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}} = 50\ dm$$

Possiamo quindi determinare l'altezza della piramide di partenza:

$$h + x = H = 75\ dm$$

A questo punto posso determinare il rapporto tra i volumi della piramide e del tronco di piramide:

$$\frac{V_p}{V_{tr}} = \frac{\frac{S}{3}H}{\frac{S}{3}H - \frac{s}{3}x} = \frac{SH}{SH - sx} = \frac{225\ dm^2 \cdot 75\ dm}{225\ dm^2 \cdot 75\ dm - 100\ dm^2 \cdot 50\ dm} = \mathbf{\frac{27}{19}}$$

4. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A" e volumi V' e V". Si sa che A'/A"=2. Calcolare il rapporto V'/V".

Esame di Stato 2002, maturità scientifica, sessione ordinaria, quesito 2

Indicati con s' e s" gli spigoli dei due tetraedri, otteniamo che:

$$A' : A'' = s'^2 : s''^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{s'}{s''}\right)^2 = \frac{A'}{A''} \quad \Rightarrow \quad \frac{s'}{s''} = \sqrt{\frac{A'}{A''}} = \sqrt{2}$$

Perciò:

$$\frac{V'}{V''} = \left(\frac{s'}{s''}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

5. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

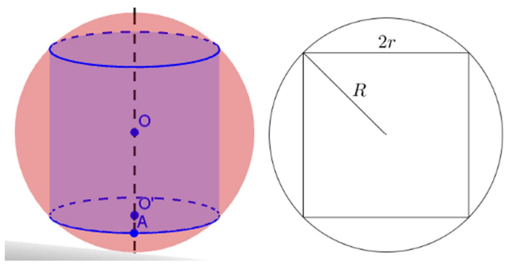
Esame di Stato 2004, maturità scientifica, sessione ordinaria, quesito 2

Il cilindro equilatero ha raggio r e altezza 2r, perciò la superficie totale è data da:

$$S_{cilindro} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$$

La sfera ha raggio R. Come si può intuire dalla vista frontale, 2R (ovvero il diametro della sfera) è la diagonale del quadrato di lato 2r, perciò: $R = r\sqrt{2}$, quindi:

$$S_{sfera} = 4\pi R^2 = 8\pi r^2$$



Ora possiamo calcolare il rapporto:

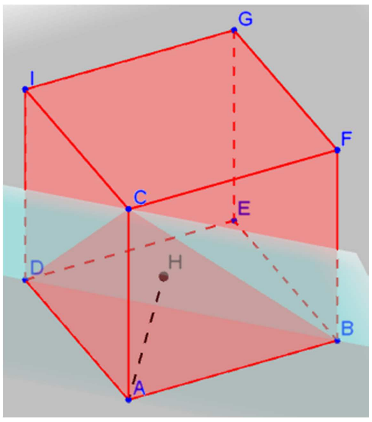
$$\frac{S_{cilindro}}{S_{sfera}} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{6}{8} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

6. Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

Esame di Stato 2005, maturità scientifica, sessione suppletiva, quesito 2

Consideriamo la piramide ABCD, di base BDC e altezza $\overline{AH}$, ovvero il segmento richiesto.
Per calcolarne il volume, applico la formula:

$$V = \frac{1}{3} S_{BDC} \, \overline{AH}$$



Per determinare l'area del triangolo BDC, considerato che è equilatero di lato pari alla diagonale della base del cubo, ovvero di lato: $l = s\sqrt{2}$, perciò l'area di base è:

$$\frac{s\sqrt{2} \cdot s\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{s^2\sqrt{3}}{2}$$

Ma il volume della piramide può essere calcolato considerando come base il triangolo ABD, metà della faccia del cubo, e come altezza lo spigolo $\overline{AC}$:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{s^2}{2} \cdot s = \frac{s^3}{6}$$

Uguagliando i due volumi ottengo la lunghezza $\overline{AH}$:

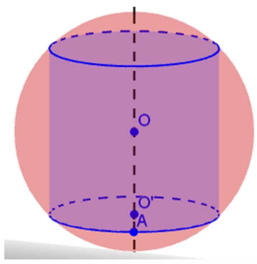
$$\frac{1}{3} \frac{s^2\sqrt{3}}{2} \overline{AH} = \frac{s^3}{6} \quad \Rightarrow \quad \overline{AH} = \boldsymbol{\frac{s\sqrt{3}}{3}}$$

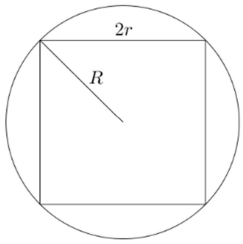
7. Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.

Esame di Stato 2008, maturità scientifica PNI, sessione suppletiva, quesito 6

$$V_{cono} : V_{cilindro} = V_{cilindro} : V_{sfera}$$

La sfera ha raggio R. Come si può intuire dalla vista frontale, 2R (ovvero il diametro della sfera) è la diagonale del quadrato di lato 2r, perciò: $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, dove r è il raggio di base del cilindro equilatero inscritto, quindi:





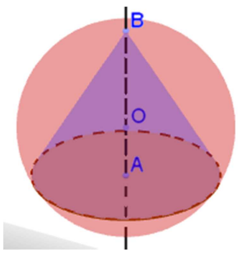
$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot 2r = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^3$$

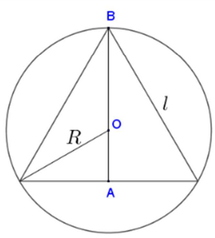
Il cono ha apotema doppia del raggio di base, visto che è equilatero, perciò nella vista frontale è come un triangolo equilatero di lato l (l'apotema) inscritto in una circonferenza. Il lato l perciò, in funzione del raggio della sfera R, è dato applicando il teorema del coseno:

$$l = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2\left(-\frac{1}{2}\right)} = R\sqrt{3}$$

Perciò il volume del cono di altezza $\overline{BA}$ data da $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ è dato da:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}\pi R^3$$





Inseriamo i volumi nella proporzione:

$$\frac{3}{8}\pi R^3 : \frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ed è facile verificare che:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^3\right)^2 = \frac{3}{8}\pi R^3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$