1. Dati i punti $A\ (-2;3;1)$, $B\ (3;0;-1)$, $C\ (2;2;-3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.

Esame di Stato – Maturità Scientifica 2017, Sessione ordinaria – Quesito 5

Determino le equazioni parametriche della retta r passante per A e per B:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)\, k \\ y = y_A + (y_B - y_A)\, k \\ z = z_A + (z_B - z_A)\, k \end{cases} \qquad r: \begin{cases} \boldsymbol{x = -2 + 5k} \\ \boldsymbol{y = 3 - 3k} \\ \boldsymbol{z = 1 - 2k} \end{cases}$$

Il vettore direzione della retta è $\overrightarrow{v_r}\ (5;\ -3;\ -2)$ e perché retta e piano siano perpendicolari, il vettore normale al piano deve essere parallelo al vettore direzione della retta:

$$\pi:\ 5x - 3y - 2z + d = 0$$

Sostituendo le coordinate del punto C nell'equazione generica del piano, otteniamo il termine noto:

$$10 - 6 + 6 + d = 0 \qquad d = -10 \qquad \boldsymbol{\pi:\ 5x - 3y - 2z - 10 = 0}$$

2. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione: $x + 2y - z + 1 = 0$ nel suo punto P di coordinate $(1;\ 0;\ 2)$.

Esame di Stato – Maturità Scientifica 2017, Sessione ordinaria – Quesito 7

Determino innanzi tutto l'equazione della retta perpendicolare al piano che passa per P.
Essendo perpendicolare al piano, ha il vettore parallelo alla normale al piano, quindi $\overrightarrow{v_r}\ (1;\ 2;\ -1)$

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2k \\ z = 2 - k \end{cases}$$

Il generico centro della sfera ha coordinate $C\ (1 + k; 2k; 2 - k)$ e pongo la sua distanza da P uguale al raggio:

$$CP = \sqrt{6} \qquad k^2 + 4k^2 + k^2 = 6 \qquad k = \pm 1$$

I due centri della sfera hanno coordinate:

$$\boldsymbol{C_1\ (2;2;1)} \qquad \boldsymbol{C_2\ (0;-2;3)}$$

3. Una sfera, il cui centro è il punto $K\ (-2;\ -1;\ 2)$, è tangente al piano π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Esame di Stato – Maturità Scientifica 2016, Sessione ordinaria – Quesito 5

Determino la retta perpendicolare al piano passante per il punto K. Essendo perpendicolare al piano, ha il vettore parallelo alla normale al piano, quindi $\overrightarrow{v_r}\ (2;\ -2;\ 1)$

$$\begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = -1 - 2k \\ z = 2 + k \end{cases}$$

Determino il punto di intersezione tra la retta e il piano, ovvero le coordinate del punto di tangenza T:

$$-4 + 4k + 2 + 4k + 2 + k - 9 = 0 \qquad 9k = 9 \qquad k = 1 \qquad \boldsymbol{T\ (0;\ -3;3)}$$

La distanza tra T e K è il raggio della sfera:

$$TK = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \boldsymbol{3}$$

4. Date le rette:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P\ (1;\ 0;\ -2)$ determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

Esame di Stato – Maturità Scientifica 2016, Sessione ordinaria – Quesito 9

Scrivo innanzi tutto la seconda retta in forma parametrica:

$$\begin{cases} x + y = 3 - k \\ 2x - y = 0 \\ z = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - \dfrac{k}{3} \\ y = 2 - \dfrac{2}{3}k \\ z = k \end{cases}$$

Le due rette hanno direzioni, rispettivamente: $\overrightarrow{v_1}\ (1; 2; 1)$ e $\overrightarrow{v_2}\ \left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 1\right)$. Il vettore normale al piano $\vec{n}\ (a; b; c)$ deve essere perpendicolare ai due vettori dati, ovvero il loro prodotto scalare deve essere nullo. Inoltre, visto che il punto P appartiene al piano, le sue coordinate soddisfano la generica equazione del piano $ax + by + cz + d = 0$:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -\dfrac{1}{3}a - \dfrac{2}{3}b + c = 0 \\ a - 2c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -a - 2b + 3c = 0 \\ a - 2c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ a + 2b = 0 \\ d = -a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2b \\ c = 0 \\ d = 2b \end{cases}$$

L'equazione del piano richiesto è quindi:

$$\mathbf{2x - y - 2 = 0}$$

5. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + r^2 + Rr)$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

Esame di Stato – Maturità Scientifica 2015, Sessione ordinaria – Quesito 2

Sia h l'altezza del tronco di cono e $h + x$ l'altezza del cono non troncato; siano R il raggio della base maggiore e r il raggio della base minore.
Il rapporto tra le aree delle due basi è proporzionale ai quadrati delle altezze:

$$S : s = (h + x)^2 : x^2 \qquad \pi R^2 : \pi r^2 = (h + x)^2 : x^2 \qquad R^2 : r^2 = (h + x)^2 : x^2 \qquad R : r = (h + x) : x$$

Applicando la proprietà dello scomporre:

$$(R - r) : r = (h + x - x) : x \qquad (R - r) : r = h : x \qquad x = \frac{rh}{R - r}$$

Posso determinare il volume del tronco di cono sottraendo il volume del cono più piccolo dal volume del cono completo:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2\,(h + x) - \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi h\,R^2 + \frac{1}{3}\pi x\,(R^2 - r^2) = \frac{1}{3}\pi h\,R^2 + \frac{1}{3}\pi\frac{rh}{R - r}\,(R - r)(R + r) = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + rR + r^2)$$

6. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

Esame di Stato – Maturità Scientifica 2015, Sessione ordinaria – Quesito 5

Se è perpendicolare al piano dato, ha la direzione parallela al vettore normale, perciò:

$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = -k \end{cases} \qquad \boldsymbol{x = y = -z}$$

7. Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza l. Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.

Esame di Stato – Maturità Scientifica 2010, Sessione suppletiva – Quesito 7

Determino il volume del tetraedro, che ha per facce quattro triangoli equilateri di lato l:

$$A_b = \frac{1}{2}l^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \qquad h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}l$$

$$V_t = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}l^2\frac{\sqrt{6}}{3}l = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3$$

L'ottaedro è formato da due piramidi di base quadrata e le facce laterali sono triangoli equilateri:

$$A_b = l^2 \qquad h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$$

Siccome sono due le piramidi, il volume dell'ottaedro si ottiene dal doppio del volume della piramide di base quadrata:

$$V_o = 2\frac{1}{3}A_b h = \frac{2}{3}l^2\frac{\sqrt{2}}{2}l = \frac{\sqrt{2}}{3}l^3$$

Si può quindi verificare:

$$V_o = 4V_t = 4\,\frac{\sqrt{2}}{12}l^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}l^3$$

$c.v.d.$

8. Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

Esame di Stato – Maturità Scientifica PNI 2005, Sessione suppletiva – Quesito 2

Inserisco il cubo in uno spazio cartesiano, perciò i quattro vertici hanno coordinate: $A\ (s; 0; 0), B\ (s; 0; s), C\ (s; s; 0), D \equiv O\ (0; 0; 0)$. Determino l'equazione del piano passante per B, C, D, sostituendo le coordinate dei tre punti nella generica equazione del piano $ax + by + cz + d = 0$:

$$\begin{cases} as + cs + d = 0 \\ as + bs + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -a \\ c = -a \\ d = 0 \end{cases} \qquad \alpha\colon\ x - y - z = 0$$

A questo punto determino la distanza del punto A dal piano così determinato:

$$d(A;\ \alpha) = \frac{|s|}{\sqrt{1+1+1}} = \boldsymbol{\frac{s\sqrt{3}}{3}}$$

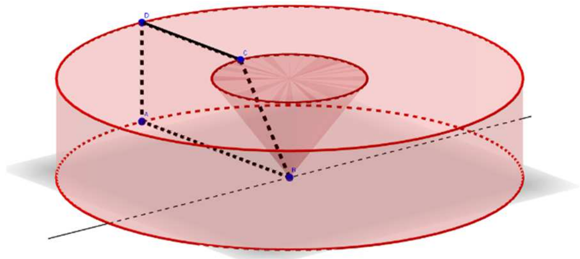
9. Il lato AD perpendicolare alle basi di un trapezio rettangolo $ABCD$ è lungo $4\ cm$, la differenza tra le basi è $3\ cm$ e la base minore CD è i $\frac{2}{3}$ della maggiore. Conduci per B la retta perpendicolare alle basi e ruota il trapezio attorno a questa retta di un angolo giro. Calcola l'area della superficie totale del solido ottenuto. Calcola inoltre il rapporto tra il volume di tale solido e il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore.

$$\overline{AD} = 4cm \qquad \overline{AB} - \overline{CD} = 3\ cm \qquad \overline{CD} = \frac{2}{3}\overline{AB}$$

Pongo $\overline{AB} = x$, perciò: $\overline{CD} = \frac{2}{3}x$ e quindi:

$$\overline{AB} - \overline{CD} = x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x = 3\ cm \qquad \overline{AB} = 9\ cm \qquad \overline{CD} = 6\ cm$$

Ruotando il trapezio attorno alla retta passante per B e perpendicolare alle basi, si ottiene un solido che è un cilindro di raggio di base $\overline{AB}$ e altezza $\overline{AD}$, al quale è stato tolto il cono di raggio di base $\overline{AB} - \overline{CD}$ e altezza pari a quella del cilindro.
L'area della superficie totale sarà l'area del cilindro senza l'area del cerchio di raggio $\overline{AB} - \overline{CD}$ a cui sarà aggiunta la superficie laterale del cono:



$$S = 2\pi\overline{AB}^2 + 2\pi\,\overline{AB}\cdot\overline{DA} - \pi(\overline{AB} - \overline{CD})^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\,(\overline{AB} - \overline{CD})\cdot\sqrt{\overline{DA}^2 + (\overline{AB} - \overline{CD})^2} =$$

$$= \pi\,(2\cdot 9^2 + 2\cdot 9\cdot 4 - 3^2 + 3\cdot 5)\ cm^2 = \mathbf{240\,\pi\ cm^2}$$

Il secondo solido è dato dal cilindro di altezza $\overline{AB}$ e raggio di base $\overline{AD}$, sormontato da un cono di altezza $\overline{AB} - \overline{CD}$ e raggio di base $\overline{AD}$:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi\,\overline{AB}^2\cdot\overline{AD} - \frac{1}{3}\pi(\overline{AB} - \overline{CD})^2\cdot\overline{AD}}{\pi\,\overline{AD}^2\cdot\overline{CD} + \frac{1}{3}\pi\,\overline{AD}^2\cdot(\overline{AB} - \overline{CD})} =$$

$$= \frac{\pi\left(9^2\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot 4\right)cm^3}{\pi\,\left(4^2\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 4^2\cdot 3\right)\,cm^3} = \frac{324 - 12}{96 + 16} = \frac{312}{112} = \mathbf{\frac{39}{14}}$$