Problema 1

La funzione $f(x)$ rappresentata in figura 1 è continua e derivabile in **R.** Il suo grafico è tangente all'asse *x* nell'origine e alla retta *t* nel punto *A*.

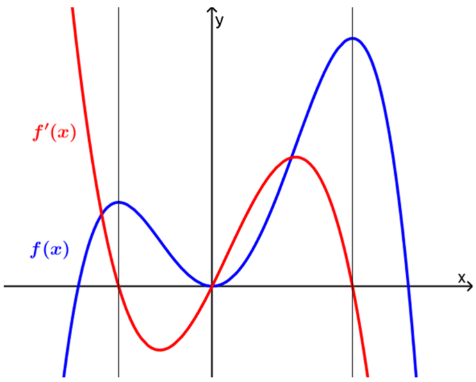
A. Traccia il grafico della funzione $f'(x)$, indicando in particolare il dominio, gli zeri e il segno.

B. Sapendo che $f(x)$ è una funzione polinomiale di quarto grado, ricava la sua espressione analitica e calcola quindi l'espressione di $f'(x)$; stabilisci infine se la funzione $f'(x)$ così ricavata è in accordo con il grafico disegnato al punto precedente.

C. Determina la funzione $f''(x)$ e calcola le coordinate delle sue intersezioni con l'asse x. A cosa corrispondono questi punti nel grafico di $f'(x)$ e di $f(x)$?

D. Calcola l'area del piano compresa tra il grafico, l'asse y e la retta tangente indicata.

A. Per ipotesi la funzione $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$, quindi $f'(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$.
Analizzando il grafico di $f(x)$ osserviamo che:
$f(x)$ è crescente per $x < -2 \lor 0 < x < 3$ e decrescente per $-2 < x < 0 \lor x > 3$, quindi $f'(x)$ è positiva per $x < -2 \lor 0 < x < 3$ e negativa per $-2 < x < 0 \lor x > 3$;
$f(x)$ ammette tre punti stazionari di ascissa $x = -2$, $x = 0$ e $x = 3$, pertanto $f'(x)$ si annulla per $x = -2$, $x = 0$ e $x = 3$;
$f(x)$ passa per il punto A di ascissa 2 e in esso ha una tangente di coefficiente angolare 4, perciò: $f'(2) = 4$;
$f(x)$ ammette sicuramente due flessi, uno con $-2 < x < 0$ e l'altro nell'intervallo $0 < x < 3$; perciò $f'(x)$ è decrescente prima del primo flesso, crescente tra i due flessi e decrescente dopo il secondo flesso, in considerazione del fatto che la $f(x)$ è, rispettivamente, con concavità verso il basso, verso l'alto e verso il basso.
Possiamo quindi tracciare un grafico plausibile della funzione $f'(x)$.



B. La funzione $f(x)$ è un polinomio di quarto grado, quindi: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, con a, b, c, d, e parametri reali. Di conseguenza, è: $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Ricaviamo i valori dei parametri a partire dai dati del grafico di $f(x)$ assegnato:

- Il grafico di $f(x)$ passa per l'origine, perciò: $f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0$
- Il grafico di $f(x)$ ha un punto stazionario in $x = 0$, perciò: $f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$
- Il grafico di $f(x)$ ha un punto stazionario in $x = -2$, perciò: $f'(-2) = 0$
- Il grafico di $f(x)$ ha un punto stazionario in $x = 3$, perciò: $f'(3) = 0$
- Il grafico di $f(x)$ è tangente alla retta con coefficiente angolare 4 in $x = 2$, perciò: $f'(2) = 4$

Mettendo a sistema le condizioni, otteniamo:

$$\begin{cases} e = 0 \\ d = 0 \\ -32\,a + 12\,b - 4c + d = 0 \\ 108\,a + 27\,b + 6c + d = 0 \\ 32\,a + 12\,b + 4c + d = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -32a + 32a + 12b + 12b - 4c + 4c = 4 \\ -8\,a + 3\,b - c = 0 \\ 36\,a + 9b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{6} \\ c = -8a + \frac{1}{2} \\ 36a + \frac{3}{2} - 16a + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{6} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

Calcolando la derivata prima otteniamo:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$$

L'espressione analitica della derivata prima è in accordo con il grafico disegnato al punto precedente, infatti:

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$$

$$f'(-2) = f'(0) = f'(3) = 0$$

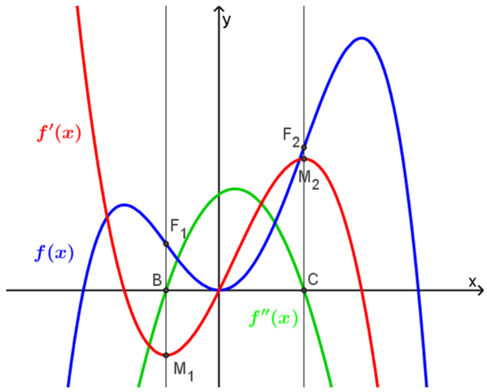
$$f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + 3 \qquad 3x^2 - 2x - 6 < 0 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{3}$$

La derivata seconda è positiva per $\frac{1-\sqrt{19}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{19}}{3}$, quindi $f'(x)$ è crescente per $\frac{1-\sqrt{19}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{19}}{3}$ e decrescente negli altri intervalli, quindi $f'(x)$ ammette minimo per $x = \frac{1-\sqrt{19}}{3}$ e massimo per $x = \frac{1+\sqrt{19}}{3}$.

C. Le intersezioni della derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + 3$$

con l'asse x sono $B\left(\frac{1-\sqrt{19}}{3}; 0\right)$ e $C\left(\frac{1+\sqrt{19}}{3}; 0\right)$. Come si vede dalla figura, i punti di intersezione con l'asse x per la derivata seconda hanno la stessa ascissa dei punti di massimo e minimo della derivata prima e corrispondono alle ascisse dei punti di flesso per la funzione $f(x)$.

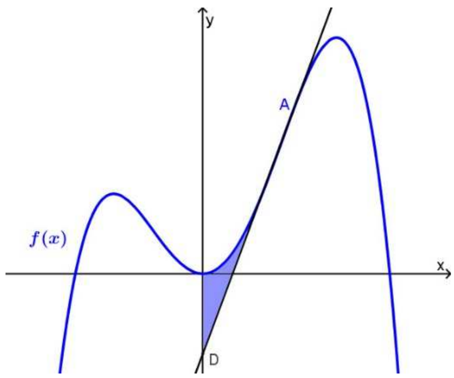


D. L'area è quella colorata nel grafico:

$$\int_0^2 \left(-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{8}{3}\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + 4 - 8 + \frac{16}{3} = \mathbf{\frac{6}{5}}$$



Problema 2

Una strada ha il profilo indicato in figura 2. Essa è rappresentata da:

- un arco di parabola per $0 \leq x \leq 4$;
- una retta per $4 < x \leq 6$;
- una funzione omografica per $6 < x \leq 14$ di equazione $y = \frac{2x-6}{x-4}$.

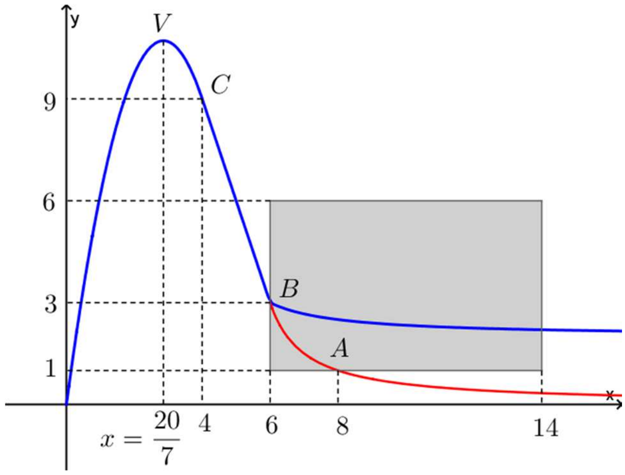
A. Determina l'equazione della strada.

B. Il signor Rossi, proprietario del terreno indicato in figura, chiede che la terza parte della strada segua un nuovo profilo, sempre basandosi su una funzione omografica, passante però per il punto A, per evitare che abbia una curva troppo brusca in B. Dopo aver determinato l'equazione della nuova strada indicata, verifica se il signor Rossi ha ragione e se, nel punto C si presenta lo stesso problema.

C. Il signor Rossi, con il nuovo progetto, perde meno terreno. Se le unità del piano cartesiano sono espresse in metri, determina quanto terreno evita di cedere il proprietario con la seconda proposta.

A. Determino innanzi tutto l'equazione della parabola, di equazione generica $y = ax^2 + bx$ visto che passa per l'origine, passante per $C(4; 9)$ e avente ascissa del vertice pari a $\frac{20}{7}$ (come indicato nella figura):

$$\begin{cases} 16a + 4b = 9 \\ -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{20}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -\dfrac{40}{7}a \\ 16a - \dfrac{160}{7}a = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{21}{16} \\ b = \dfrac{15}{2} \end{cases}$$



La parabola ha equazione: $\boldsymbol{y = -\frac{21}{16}x^2 + \frac{15}{2}x}$

La retta, invece, passa per i punti $B(6; 3)$ e $C(4; 9)$, perciò:

$$\frac{x-4}{6-4} = \frac{y-9}{3-9} \qquad -3x + 12 = y - 9 \qquad y = -3x + 21$$

L'equazione della strada è:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} -\dfrac{21}{16}x^2 + \dfrac{15}{2}x & 0 \leq x \leq 4 \\ -3x + 21 & 4 < x \leq 6 \\ \dfrac{2x-6}{x-4} & 6 < x \leq 14 \end{cases}}$$

B. Perché la nuova strada non presenti curve brusche in B, deve avere lo stesso coefficiente angolare della retta in B, ovvero $f'(6) = -3$. Il nuovo tratto di strada ha generica equazione $y = \frac{kx+m}{x+n}$ e derivata: $y' = \frac{kx+kn-kx-m}{(x+n)^2} = \frac{kn-m}{(x+n)^2}$. Metto a sistema le tre condizioni, ovvero il passaggio per B, per A e la derivabilità in B:

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{6k+m}{6+n} \\ 1 = \dfrac{8k+m}{8+n} \\ -3 = \dfrac{kn-m}{(6+n)^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} n = 8k + m - 8 \\ 6k + m = 18 + 24k + 3m - 24 \\ -3 = \dfrac{kn-m}{(6+n)^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} m = -9k + 3 \\ n = -k - 5 \\ -3\,(6 - k - 5)^2 = k\,(-k-5) + 9k - 3 \end{cases}$$

$$-3\,(1 - 2k + k^2) = -k^2 - 5k + 9k - 3 \qquad 2k^2 - 2k = 0$$

$$\begin{cases} k = 0 \\ m = 3 \\ n = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 1 \\ m = -6 \\ n = -6 \end{cases}$$

La seconda soluzione non è accettabile, perché dà luogo alla retta $y = 1$, perciò l'equazione dell'iperbole è:

$$y = \frac{3}{x-5}$$

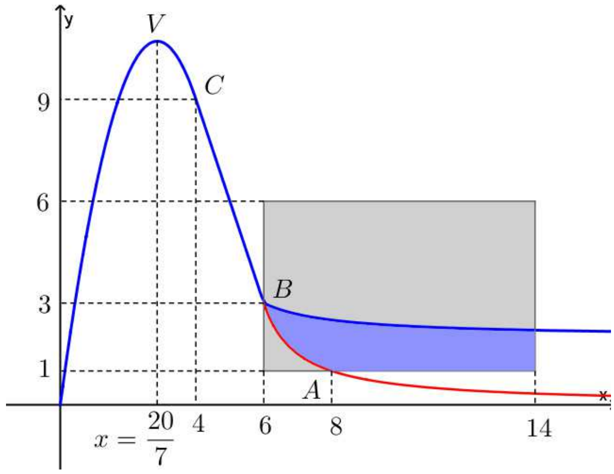
Per verificare se il signor Rossi ha ragione, calcoliamo la pendenza dell'iperbole data in partenza nel punto B:

$$y=\frac{2x-6}{x-4} \qquad y'=\frac{2x-8-2x+6}{(x-4)^2}=-\frac{2}{(x-4)^2} \qquad f'(6)=-\frac{1}{2}\neq -3$$

Il signor Rossi ha ragione. Verifichiamo che nel punto C non si presenta lo stesso problema, perché la parabola ha in $x=4$ la stessa pendenza della retta:

$$y'=-\frac{21}{8}x+\frac{15}{2} \qquad f'(4)=-\frac{21}{2}+\frac{15}{2}=-3$$

C. L'area da determinare è quella colorata in azzurro in figura:



$$\int_6^8\left(\frac{2x-6}{x-4}-\frac{3}{x-5}\right)dx+\int_8^{14}\left(\frac{2x-6}{x-4}-1\right)dx=$$

$$=\int_6^8\left(2+\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x-5}\right)dx+\int_8^{14}\left(2+\frac{2}{x-4}-1\right)dx=$$

$$=[2x+2\ln|x-4|-3\ln|x-5|]_6^8+[x+2\ln|x-4|]_8^{14}=$$

$$=4+2\ln 2-3\ln 3+6+2\ln\frac{5}{2}=$$

$$=10+2\ln 2-3\ln 3+2\ln 5-2\ln 2==10+\ln\frac{25}{27}$$

L'area indicata è **9,92 m²**.

Questionario

1. La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + tg\, x$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

   Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva, 2013, quesito 4

   L'area di un triangolo equilatero si calcola:

$$A = \frac{1}{2} l^2 sen\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

   Perciò:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + tgx)^2\, dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + tg^2 x + 2\, tgx)\, dx = \frac{\sqrt{3}}{4} [tg\, x - 2 \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - 2 \ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \ln 2)}$$

2. Si consideri questa equazione differenziale: $y'' + 2y' + 2y = x$. Quale delle seguenti funzioni ne è la soluzione? Si giustifichi la risposta.

   a. $y = e^{-x}(sen\, x + \cos x) + x$
   b. $y = 2e^{-x} + x$
   c. $y = e^{-x}(sen\, x + \cos x) + \frac{1}{2}(x - 1)$
   d. $y = e^{-2x} + x$

   Esame di Stato, Liceo Scientifico, Sessione suppletiva, 2016, quesito 1

   Determino derivata prima e seconda di tutte le funzioni, sostituisco nell'equazione di partenza e verifico quale sia la soluzione:

A. $y' = -e^{-x}(sen\, x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - sen\, x) + 1 = -2\, senx\, e^{-x} + 1$

$y'' = -2 \cos x\; e^{-x} + 2\, sen\, x\, e^{-x}$

$-2 \cos x\; e^{-x} + 2\, senx\, e^{-x} - 4\, senx\, e^{-x} + 2 + 2\, senx\, e^{-x} + 2 \cos x\; e^{-x} + 2x = x$

$2 + 2x \neq x$

La prima funzione non è soluzione dell'equazione differenziale.

B. $y' = -2e^{-x} + 1$ $\qquad y'' = 2e^{-x}$

$2e^{-x} - 4e^{-x} + 2 + 4e^{-x} + 2x = x$ $\qquad 2e^{-x} + 2 + x \neq 0$

La seconda funzione non è soluzione dell'equazione differenziale.

C. $y' = -e^{-x}(sen\, x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - sen\, x) + \frac{1}{2} = -2\, senx\, e^{-x} + \frac{1}{2}$

$y'' = -2 \cos x\; e^{-x} + 2\, sen\, x\, e^{-x}$

$-2 \cos x\; e^{-x} + 2\, senx\, e^{-x} - 4\, senx\, e^{-x} + 1 + 2\, senx\, e^{-x} + 2 \cos x\; e^{-x} + x - 1 = x$ $\qquad x = x$

La terza funzione è soluzione dell'equazione differenziale.

D. $y' = -2e^{-2x} + 1$ $\qquad y'' = 4e^{-2x}$

$4e^{-2x} - 4e^{-2x} + 2 + 2e^{-2x} + 2x = x$ $\qquad 2e^{-2x} + 2 + 2x \neq x$

La quarta funzione non è soluzione dell'equazione differenziale.

3. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione $f(x) = (x+2)^{\ln(e+2x)}$ nel punto $P(0;2)$.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione suppletiva, 2012, quesito 3

La funzione si può riscrivere come:

$$f(x) = e^{\ln\,(x+2)^{\ln\,(e+2x)}} = e^{\ln\,(e+2x)\ln\,(x+2)}$$

Per determinare l'equazione della tangente, devo determinare il coefficiente angolare, che corrisponde alla derivata della funzione calcolata nel punto P:

$$f'(x) = e^{\ln(e+2x)\ln(x+2)}\left(2\frac{\ln(x+2)}{e+2x} + \frac{\ln(e+2x)}{x+2}\right)$$

$$f'(0) = e^{\ln(e)\ln\,2}\left(2\frac{\ln\,2}{e} + \frac{\ln(e)}{2}\right) = e^{\ln 2}\left(\frac{2\ln 2}{e} + \frac{1}{2}\right) = \frac{4\ln 2}{e} + 1$$

L'equazione della tangente è:

$$y - y_P = f'(x_P)\,(x - x_P) \qquad \boldsymbol{y = \left(\frac{4\ln 2}{e} + 1\right)x + 2}$$

4. Si determini la probabilità che nel lancio di due dadi si presenti come somma un numero dispari. Lanciando 5 volte i due dadi, qual è la probabilità di ottenere come somma un numero dispari almeno due volte?

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione suppletiva, 2012, quesito 9

I casi possibili sono 36 ed i casi favorevoli sono 18 e si ottengono sommando un numero pari con un numero dispari.
Perciò la probabilità che la somma sia dispari è: $\frac{1}{2}$.

Lanciando i dadi cinque volte, la probabilità di ottenere almeno due volte un numero dispari è, usando la distribuzione di Bernoulli:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

Ricordando che:

$$P(X = x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Perciò:

$$P(X \geq 2) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - 6\cdot\frac{1}{32} = 1 - \frac{3}{16} = \boldsymbol{\frac{13}{16}}$$

5. Qual è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione ordinaria, 2005, quesito 9

Nel lancio di due dadi abbiamo 36 possibilità e le coppie favorevoli sono (6; 4), (4; 6) e (5; 5), perciò la probabilità di ottenere come somma 10 è:

$$p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Usando la distribuzione di Bernoulli, considerando i sei lanci (cioè $n = 6$), otteniamo:

$$P(X = x) = \binom{6}{x}\left(\frac{1}{12}\right)^x \left(\frac{11}{12}\right)^{6-x}$$

Per determinare la probabilità di ottenere 10 in due lanci:

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^4 = \mathbf{7,35\ \%}$$

Per determinare la probabilità di ottenere almeno due lanci:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0 \left(\frac{11}{12}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^5 = \mathbf{8,31\ \%}$$

6. Si sa che il prodotto di due funzioni $z(x)$ e $y(x)$ vale: $z(x) \cdot y(x) = z(x) - y'(x)$. Determina $y(x)$ sapendo che $z(x) = 2x$ e $y(0) = 0$.

Si tratta di un'equazione differenziale:

$$\begin{cases} y' + 2xy = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si può risolvere come un'equazione differenziale lineare del primo ordine completa o come un'equazione a variabili separabili. Come equazione lineare del primo ordine abbiamo:

$$a(x) = 2x \qquad \int a\,(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2$$

$$b(x) = 2x \qquad \int e^{x^2} 2x\,dx = e^{x^2}$$

$$y = e^{-x^2}\left(e^{x^2} + c\right) = 1 + c\,e^{-x^2}$$

Dalla condizione iniziale determino la costante:

$$y(0) = 1 + c = 0 \qquad c = -1 \qquad \boldsymbol{y = 1 - e^{-x^2}}$$