1. $(2^{x+2})^2 \cdot 3^x = \frac{2}{3^{x+3}}$

$$\frac{2^{2x+4}}{2} \cdot 3^x \cdot 3^{x+3} = 1 \qquad 2^{2x+3} \cdot 3^{2x+3} = 1 \qquad 6^{2x+3} = 6^0 \qquad 2x + 3 = 0 \qquad x = -\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

2. $(3^{2-x} - 27)\left(\frac{1}{2} - 4^x\right) \geq 0$

$IF \geq 0$: $\quad 3^{2-x} \geq 27 \qquad 3^{2-x} \geq 3^3 \qquad 2 - x \geq 3 \qquad x \leq -1$

$IIF \geq 0$: $\quad \frac{1}{2} \geq 4^x \qquad 2^{-1} \geq 2^{2x} \qquad 2x \leq -1 \qquad x \leq -\frac{1}{2}$

Svolgendo lo studio dei segni, otteniamo:

$$\boldsymbol{x \leq -1} \quad \vee \quad \boldsymbol{x \geq -\frac{1}{2}}$$

3. $\log_3(2x - 1) = 2\ \log_9(3x + 6) - 2$

$$\log_3(2x - 1) = 2 \cdot \frac{\log_3(3x + 6)}{\log_3 9} - 2\ \log_3 3$$

$$\log_3(2x - 1) = \log_3\big(3\ (x + 2)\big) - 2\ \log_3 3 \qquad \log_3(2x - 1) = \log_3 3 + \log_3(x + 2) - 2\ \log_3 3$$

$$\log_3 3 + \log_3(2x - 1) = \log_3(x + 2) \qquad \log_3(6x - 3) = \log_3(x + 2)$$

$$6x - 3 = x + 2 \qquad 5x = 5 \qquad \boldsymbol{x = 1\ acc.}$$

4. $\ln x + \frac{2}{\ln x} - 3 \leq 0$

Pongo $\ln x = t$:

$$t + \frac{2}{t} - 3 \leq 0 \qquad \frac{t^2 - 3t + 2}{t} \leq 0 \qquad t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

Effettuando lo studio dei segni:

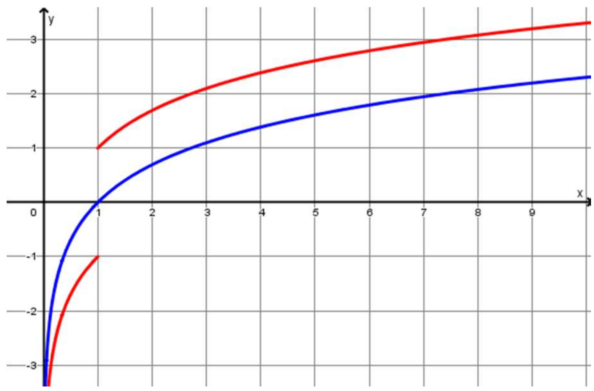
$$t < 0 \quad \vee \quad 1 \leq t \leq 2 \qquad \begin{cases} \ln x < 0 \quad \vee \quad 1 \leq \ln x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \quad \vee \quad e \leq x \leq e^2 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{0 < x < 1 \quad \vee \quad e \leq x \leq e^2}$$

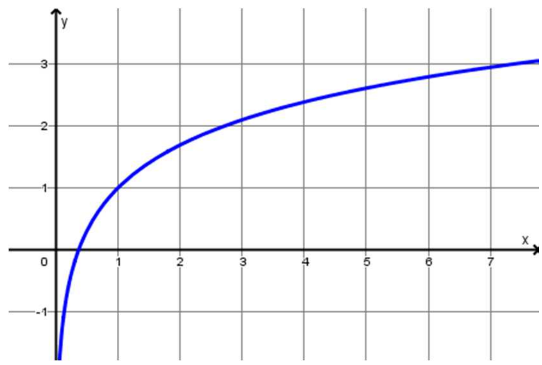
5. Disegna il grafico di due delle seguenti funzioni, a tua scelta, usando le trasformazioni geometriche:

$$y=\frac{\ln x}{|\ln x|}+\ln x \qquad y=-\ln\frac{1}{x}+1 \qquad y=2^{-x}+\frac{x}{|x|} \qquad y=|-2^{-x}|$$

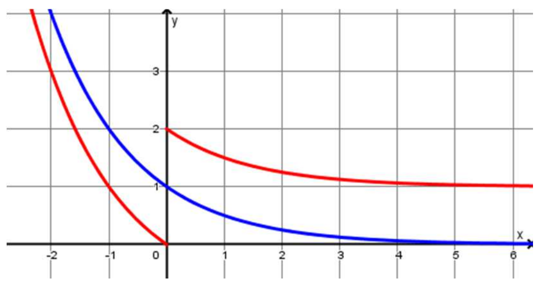
A. $y=\frac{\ln x}{|\ln x|}+\ln x=\left\langle \begin{array}{ll} 1+\ln x & se \ln x>0 \\ -1+\ln x & se \ln x<0 \end{array}\right.$



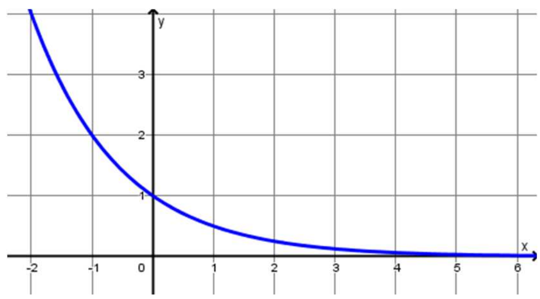
B. $y=-\ln\frac{1}{x}+1=\ln x+1$



C. $y=2^{-x}+\frac{x}{|x|}=\left\langle \begin{array}{ll} 2^{-x}+1 & se\ x>0 \\ 2^{-x}-1 & se\ x<0 \end{array}\right.$



D. $y=|-2^{-x}|=|2^{-x}|=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^x$



6. Svolgi UNO dei seguenti problemi:

A. Considera la funzione $f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x} + c$.
Determina a, b, c in modo che il suo grafico sia simmetrico rispetto all'asse y, passi per $\left(1; \frac{7}{2}\right)$ e $f(0) = 4$.
Calcola per quali valori di x è $f(x) \geq \frac{9}{2}$.

Siccome il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y, la funzione non passa solo per il punto $\left(1; \frac{7}{2}\right)$, ma anche per il punto $\left(-1; \frac{7}{2}\right)$. Impongo quindi il passaggio della funzione per i tre punti dati:

$$\begin{cases} 2a + \frac{1}{2}b + c = \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2}a + 2b + c = \frac{7}{2} \\ a + b + c = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b = 0 \\ \frac{1}{2}a + 2b + c = \frac{7}{2} \\ a + b + c = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = b \\ \frac{5}{2}a + c = \frac{7}{2} \\ 2a + c = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = b \\ \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} \\ c = 4 - 2a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f(x) = -2^x - 2^{-x} + 6}$$

$$-2^x - 2^{-x} + 6 \geq \frac{9}{2} \qquad -2^x - \frac{1}{2^x} + \frac{3}{2} \geq 0$$

Pongo: $2^x = t$:

$$-t - \frac{1}{t} + \frac{3}{2} \geq 0 \qquad -2t^2 + 3t - 2 \geq 0 \qquad 2t^2 - 3t + 2 \leq 0 \qquad \Delta < 0 \qquad \boldsymbol{\nexists x \in \mathbb{R}}$$

B. La legge del decadimento radioattivo è espressa dalla funzione $N(t) = N_o e^{-\lambda t}$, dove N_o è il numero dei nuclei radioattivi presenti all'istante $t = 0$, $N(t)$ è il numero di nuclei presenti all'istante t, λ è la costante di decadimento caratteristica dell'elemento, t rappresenta il tempo (espresso in giorni). Supponiamo che $4{,}75 \cdot 10^7$ atomi di radon si trovino nelle fondamenta di una casa; queste vengono sigillate per impedire che entri altro radon. Sapendo che la costante di decadimento del radon è $\lambda = 0{,}181\ giorni^{-1}$:
Trova quanti atomi di radon rimangono nelle fondamenta dopo una settimana e dopo due settimane;
Calcola il tempo di dimezzamento del numero dei nuclei del radon;
Se il radon iniziale fosse una quantità N_o incognita, un mese sarebbe sufficiente per farlo scomparire?

a. $N(7) = 4{,}75 \cdot 10^7 \cdot e^{-0{,}181 \cdot 7} = \boldsymbol{1{,}34 \cdot 10^7}$
$N(14) = 4{,}75 \cdot 10^7 \cdot e^{-0{,}181 \cdot 14} = \boldsymbol{3{,}77 \cdot 10^6}$

b. $N_o\, e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} N_o \qquad e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \qquad -\lambda t = \ln\frac{1}{2} \qquad \lambda t = \ln 2 \qquad t = \frac{\ln 2}{\lambda} \sim \boldsymbol{4\ giorni}$

c. $N(t) = N_o e^{-30\,\lambda} = 0{,}0044\, N_o$

No, non sarebbe sufficiente!