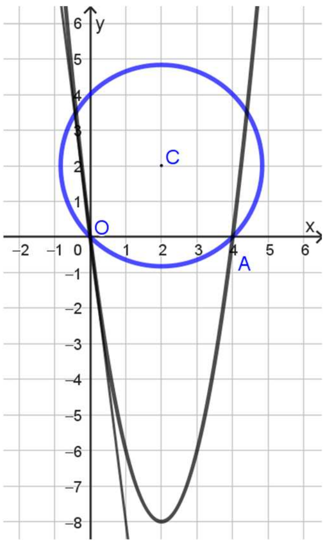
Problema 1

1. Nel piano xOy:
   A. determinare l'equazione della circonferenza avente per centro il punto $(2;\ 2)$ e tangente alla retta $r: y = x + 4$;
   B. detto A l'ulteriore punto (oltre l'origine O degli assi) di intersezione della circonferenza con l'asse x, determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per A e tangente in O alla retta $y = -8x$;
   C. determinare l'equazione della retta t tangente alla parabola e parallela alla retta $y = -2x + 3$, indicando con H il punto di tangenza;
   D. determinare l'equazione della retta s parallela a r che incontra la parabola in due punti M ed N in modo che sia $\overline{MN} = \frac{7}{\sqrt{2}}$;
   E. calcolare l'area del triangolo MNH.

A. Determino il raggio della circonferenza, calcolando la distanza del centro dalla retta tangente: $r = \frac{|2-2+4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.
Determino l'equazione della circonferenza come luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza dal centro pari al raggio:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0}$$



B. Determino le coordinate di A, mettendo a sistema l'equazione della circonferenza con l'asse x:

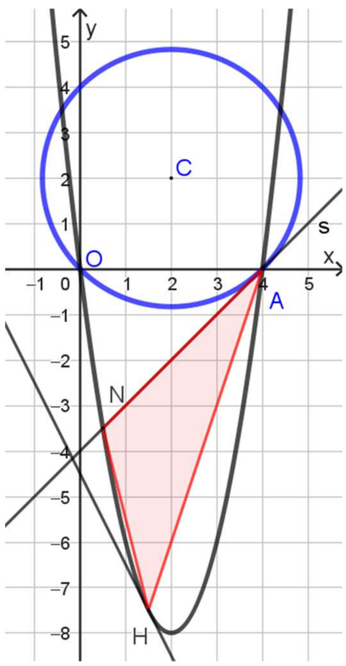
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad O(0{,}0) \quad A(4{,}0)$$

Per determinare la parabola, uso i fasci di parabole tangenti a una retta data in un punto. Se la generica retta tangente ha equazione esplicita $y = mx + q$ ed è tangente nel punto di ascissa x_o, il generico fascio di parabole ha equazione

$$y = mx + q + k(x - x_o)^2$$

Perciò, in questo caso, diventa: $y = -8x + kx^2$.

Impongo il passaggio per il punto A, sostituendo le coordinate di A nell'equazione del fascio: $0 = -32 + 16k \quad \Rightarrow \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = 2x^2 - 8x}$.



C. La generica retta parallela alla retta data ha equazione $y = -2x + q$. Metto a sistema la generica tangente e l'equazione della parabola e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = -2x + q \\ y = 2x^2 - 8x \end{cases} \qquad 2x^2 - 8x = -2x + q \qquad 2x^2 - 6x - q = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 + 2q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = -2x - \frac{9}{2}}$$

Determino le coordinate del punto di tangenza: $2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x-3)^2 = 0$

$$x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H\left(\frac{3}{2};\ -\frac{15}{2}\right)}$$

D. Considero la generica retta $s: y = x + k$ e determino le coordinate generiche di M e N:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 8x \\ y = x + k \end{cases} \qquad 2x^2 - 8x = x + k \qquad 2x^2 - 9x - k = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 8k}}{4}$$

$$M\left(\frac{9 + \sqrt{81+8k}}{4};\ \frac{9 + 4k + \sqrt{81+8k}}{4}\right) \quad N\left(\frac{9 - \sqrt{81+8k}}{4};\ \frac{9 + 4k - \sqrt{81+8k}}{4}\right)$$

Pongo la distanza tra i due punti a $7/\sqrt{2}$:

$$\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{81+8k}}{4}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{81+8k}}{4}\right)^2} = \frac{7}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{81+8k}{4} + \frac{81+8k}{4} = \frac{49}{2}$$

$$\frac{81+8k}{2} = \frac{49}{2} \quad \Rightarrow \quad 81 + 8k = 49 \quad \Rightarrow \quad k = -4 \quad \Rightarrow \quad s: y = x - 4$$

E. Per determinare l'area del triangolo MNH, conoscendo la lunghezza del segmento MN, determino la distanza del punto H dalla retta s, che è l'altezza del triangolo, e poi posso calcolare l'area:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\overline{MN} \cdot d\,(H; s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\left|\frac{3}{2} + \frac{15}{2} - 4\right|}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{35}{4}}$$

Problema 2

2. Nel piano xOy determinare:

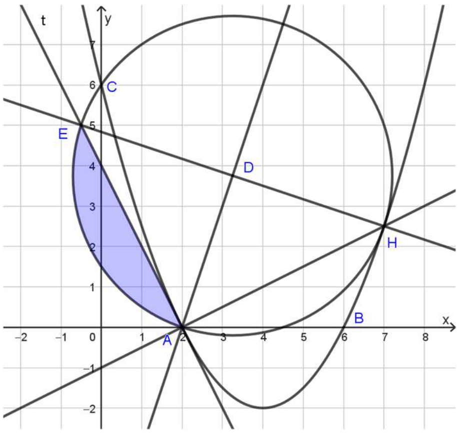
A. l'equazione della parabola $\mathcal{P}_1$ avente asse parallelo all'asse y e passante per $A\ (2;\ 0)$, $B\ (6;\ 0)$ e $C\ (0;\ 6)$;

B. essendo H l'ulteriore punto d'intersezione di $\mathcal{P}_1$ con la perpendicolare per A alla tangente t in A alla parabola, determinare l'equazione della circonferenza di centro D circoscritta al triangolo CAH;

C. essendo E l'ulteriore punto di intersezione tra la tangente t e la circonferenza, determina l'area della parte di piano delimitata dall'arco minore EA della circonferenza e dalla retta tangente t.

A. Determino la parabola passante per i punti dati, sostituendo le loro coordinate nella generica equazione: $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} 0 = 4a + 2b + c \\ 0 = 36a + 6b + c \\ 6 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 6 \\ b = -2a - 3 \\ 6a - 2a - 3 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\mathcal{P}_1: y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6}$$



B. Per determinare la perpendicolare alla tangente passante per A, determino la tangente in A usando la formula di sdoppiamento:

$$\frac{y+0}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2x - 4\frac{x+2}{2} + 6 \qquad t: y = -2x + 4$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x-2) \qquad y = \frac{1}{2}x - 1$$

A questo punto, posso determinare le coordinate dell'intersezione tra la retta appena determinata e la parabola:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \end{cases} \qquad \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = \frac{1}{2}x - 1 \qquad x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \qquad H\left(7; \frac{5}{2}\right)$$

Determino il centro della circonferenza, mettendo a sistema gli assi delle corde AC e AH:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-6)^2 \\ (x-2)^2 + y^2 = (x-7)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3y - 8 \\ 2x - 9 + y - \frac{5}{4} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3y - 8 \\ y = \frac{15}{4} \end{cases} \qquad D\left(\frac{13}{4}, \frac{15}{4}\right)$$

Posso, quindi, determinare l'equazione della circonferenza, prendendo come raggio la distanza DA:

$$\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{4}\right)^2 = \left(2 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(0 - \frac{15}{4}\right)^2 \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - \frac{15}{2}y + 9 = 0}$$

C. Per cominciare, determino le coordinate di E, mettendo a sistema l'equazione della retta t con quella della circonferenza:

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - \frac{15}{2}y + 9 = 0 \end{cases} \qquad x^2 + (-2x+4)^2 - \frac{13}{2}x - \frac{15}{2}(-2x+4) + 9 = 0$$

$$5x^2 - \frac{15}{2}x - 5 = 0 \qquad 2x^2 - 3x - 2 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} \qquad E\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$$

Osservando il disegno, posso intuire che DE e DA siano perpendicolari. Lo verifico determinando i coefficienti angolari:

$$m_{DE} = -\frac{1}{3} \qquad m_{AD} = 3$$

Posso determinare l'area, facendo la differenza tra l'area del quarto di circonferenza ADE e l'area del triangolo rettangolo ADE:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{4}r^2(\pi - 2) = \frac{1}{4}\left(\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)^2(\pi - 2) = \boldsymbol{\frac{125}{32}(\pi - 2)}$$

QUESTIONARIO

1. La pressione atmosferica cambia con la quota h, misurata rispetto al livello del mare, secondo la legge $p(h) = p_o e^{-\frac{h}{a}}$, dove $p_o = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa$ rappresenta la pressione atmosferica al suolo.
   A. Calcola, in funzione della costante a, il valore di h affinché la pressione atmosferica sia quella al suolo moltiplicata per $1/e^2$.
   B. Supponendo $a = 8000\ m$, calcola di quanto si riduce in percentuale la pressione atmosferica all'altezza di $50\ m$.

A. Pongo $p(h) = p_o \frac{1}{e^2}$ e risolvo l'equazione esponenziale corrispondente:

$$p_o\, e^{-\frac{h}{a}} = p_o \frac{1}{e^2} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{h}{a}} = e^{-2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{h}{a} = -2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h = 2a}$$

B. Con i dati $a = 8000\ m$ e $h = 50\ m$, calcolo la variazione percentuale:

$$\frac{p_o - p}{p_o} = \frac{p_o - p_o\, e^{-\frac{h}{a}}}{p_o} = 1 - e^{-\frac{h}{a}} = \mathbf{0{,}62\%}$$

2. Risolvi la seguente disequazione: $4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} > 42$

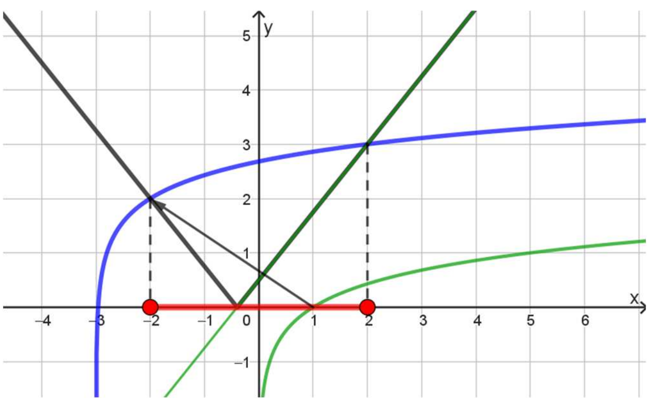
$$4^x + 4 \cdot 4^x + 4^2 \cdot 4^x > 42 \quad \Rightarrow \quad 4^x\,(1 + 4 + 4^2) > 42 \quad \Rightarrow \quad 4^x \cdot 21 > 42 \quad \Rightarrow \quad 2^{2x} > 2 \quad \Rightarrow \quad 2x > 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x > \frac{1}{2}}$$

3. Risolvi la seguente disequazione: $\frac{5}{4}\log_4 x + \log_{16} \sqrt[4]{x} < \frac{11}{16}$

$$\frac{5}{4}\log_4 x + \frac{\log_4 x^{\frac{1}{4}}}{\log_4 16} < \frac{11}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4}\log_4 x + \frac{1}{4}\frac{\log_4 x}{2} < \frac{11}{16} \quad \Rightarrow \quad 20\log_4 x + 2\log_4 x < 11 \quad \Rightarrow \quad \log_4 x < \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x < \frac{1}{2}\log_4 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{0 < x < 2}$$

4. Risolvi graficamente la disequazione: $\log_5(x+3) + 2 \geq \left|\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}\right|$



Innanzi tutto, rappresento (in verde) la funzione $y = \log_5 x$ e, traslando la funzione di un vettore $\vec{v}\ (-3, 2)$, ottenendo la funzione indicata in blu. Rappresento poi la retta $y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$, sempre in verde, ma, siccome devo considerarne il valore assoluto, faccio la simmetrica della retta nella parte $y < 0$. Determino graficamente le intersezioni tra le due funzioni. Siccome la funzione logaritmica deve essere maggiore dell'altra, questo avviene nei valori compresi tra le ascisse delle intersezioni, come indicato nel disegno a lato:

$$\boldsymbol{-2 \leq x \leq 2}$$

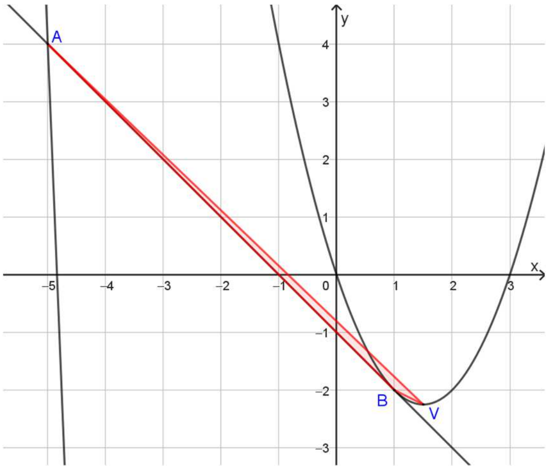
5. Trova le equazioni delle rette passanti per $A\ (-5;\ 4)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 3x$. Detto B il punto di intersezione tra la parabola e la tangente con coefficiente angolare maggiore e detto V il vertice della parabola, determina l'area del triangolo ABV.

Metto a sistema l'equazione della generica retta passante per A con l'equazione della parabola e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente, per determinare il coefficiente angolare della retta tangente:

$$\begin{cases} y - 4 = k(x+5) \\ y = x^2 - 3x \end{cases} \qquad x^2 - 3x = kx + 5k + 4 \qquad x^2 - x\,(k+3) - 4 - 5k = 0$$

$$\Delta = (k+3)^2 + 16 + 20k = 0 \qquad k^2 + 26k + 25 = 0 \qquad k_{1,2} = -13 \pm \sqrt{169 - 25} = -13 \pm 12$$

Il coefficiente angolare maggiore è -1, perciò la tangente ha equazione: $y = -x - 1$.



Determino le coordinate di B, punto di intersezione tra la tangente e la parabola:

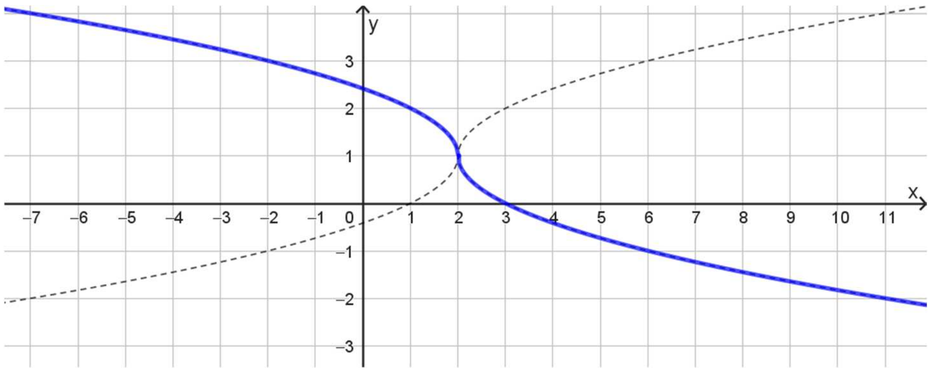
$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \qquad B(1;\ -2)$$

Determino le coordinate del vertice: $V\left(\frac{3}{2};\ -\frac{9}{4}\right)$ e calcolo la distanza del vertice dalla retta tangente, per determinare l'altezza del triangolo ABV, poi calcolo la lunghezza del segmento AB per avere la base del triangolo ABV. A quel punto, sarà semplice determinare l'area, con il semiprodotto delle due lunghezze:

$$h = d(V;t) = \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{9}{4} + 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \qquad \overline{AB} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} h \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot 6\sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

6. Trova l'equazione del grafico utilizzando i dati delle figure, in cui i due archi rappresentati appartengono a parabole:



Per determinare la parabola di sinistra, di generica equazione $x = ay^2 + by + c$, considero le coordinate del vertice $V(2;1)$, sostituendole nell'equazione generica per ottenere la prima equazione, ponendo il generico asse di simmetria $y = -\frac{b}{2a}$ uguale a $y = 1$, e sostituisco in fine le coordinate del punto $A(1;0)$ per cui passa la parabola (i dati si ricavano dal grafico):

$$\begin{cases} 2 = a + b + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ 1 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 1 \\ b = -2a \\ a - 2a + 1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \qquad x = -y^2 + 2y + 1$$

Da questa equazione ricavo quella della funzione, esplicitando la y:

$$y^2 - 2y + 1 = -x + 2 \qquad (y-1)^2 = -x + 2 \qquad y - 1 = \sqrt{2 - x} \qquad y = 1 + \sqrt{2 - x}$$

Procedo con la seconda parabola, sostituendo, al posto del punto A il punto $B(3;0)$:

$$\begin{cases} 2 = a + b + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ 3 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 3 \\ b = -2a \\ a - 2a + 3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases} \qquad x = y^2 - 2y + 3$$

Da questa equazione ricavo quella della funzione, esplicitando la y:

$$y^2 - 2y + 1 = x - 2 \qquad (y-1)^2 = x - 2 \qquad y - 1 = -\sqrt{x - 2} \qquad y = 1 - \sqrt{x - 2}$$

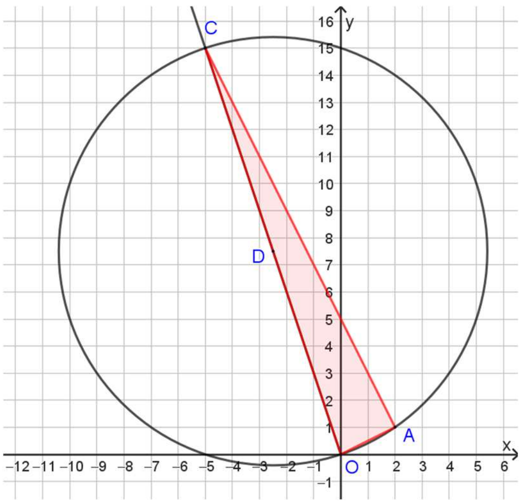
L'equazione della curva è:

$$\boldsymbol{y = \begin{cases} 1 + \sqrt{2 - x} & se\ x \leq 2 \\ 1 - \sqrt{x - 2} & se\ x > 2 \end{cases}}$$

7. Determina i coefficienti a, b, c in modo che l'equazione $ax^2 + by^2 - 2x + 6y + c = 0$ rappresenti la circonferenza passante per $O(0;0)$ e $A(2;1)$ e l'area del triangolo OAC, essendo OC un diametro.

Ci sono informazioni implicite: trattandosi di una circonferenza i coefficienti dei termini di secondo grado devono essere uguali, perciò $a = b$, inoltre, passando per l'origine $c = 0$. L'equazione generica diventa: $ax^2 + ay^2 - 2x + 6y = 0$ e basta sostituire le coordinate di A per determinare il parametro incognito:

$$4a + a - 4 + 6 = 0 \qquad a = -\frac{2}{5}$$



L'equazione della circonferenza è: $-\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}y^2 - 2x + 6y = 0$, in forma normale:

$$x^2 + y^2 + 5x - 15y = 0$$

Il centro ha coordinate: $D\left(-\frac{5}{2};\frac{15}{2}\right)$. Il triangolo OAC è rettangolo, in quanto inscritto in una semicirconferenza e con un lato coincidente con il diametro. Determino la misura del raggio OD e l'equazione della retta OD, per avere la misura del diametro e la misura dell'altezza, data dalla distanza di A dal diametro:

$$\overline{OD} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{10} \qquad \overline{OC} = 2 \cdot \overline{OD} = 5\sqrt{10}$$

$$rta(O;D) = t:\ y = \frac{15}{2} : \left(-\frac{5}{2}\right) x \qquad y = -3x$$

$$h = d(A;t) = \frac{|1+6|}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} h \cdot \overline{OC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} \cdot 5\sqrt{10} = \boldsymbol{\frac{35}{2}}$$

8. Traccia la curva di equazione: $y = \sqrt{2|x| - x^2}$

Si tratta di archi di circonferenza:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 2|x| = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \ \wedge \ x \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 0 \ \wedge \ x < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

Entrambi gli archi di circonferenza hanno raggio 1 e, per l'arco situato nel primo quadrante, il centro è $C_1(1;0)$, mentre per l'arco situato nel secondo quadrante, il centro è $C_2(-1;0)$: