Risolvi e discuti la seguente disequazione letterale:

1. $(a-5x)(2a+x)+(a+x)^2 \leq (a-x)(5x+4a)-(a-x)(x+a)$

$2a^2+ax-10\,ax-5x^2+a^2+2ax+x^2 \leq 5ax+4a^2-5x^2-4ax-(a^2-x^2)$

$2a^2-10\,ax+a^2+2ax+x^2 \leq 4a^2-a^2+x^2$

$-10\,ax+2ax \leq 0 \qquad 8ax \geq 0$

Se $a>0$: $\boldsymbol{x \geq 0}$ Se $a<0$: $\boldsymbol{x \leq 0}$ Se $a=0$: $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

Risolvi:

2. $\begin{cases} (x+3)^2-x^2-7<2(3x+1) \\ 2x>x\,(x+1)+(2-x)(2+x) \end{cases}$

Risolviamo la prima disequazione del sistema:

$x^2+6x+9-x^2-7<6x+2 \qquad 9-7<2 \qquad \nexists x \in \mathbb{R}$

Siccome una disequazione è impossibile, anche il sistema è impossibile: $\nexists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

3. $|2x-3|<6+7x$

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & se\ x \geq \frac{3}{2} \\ -2x+3 & se\ x<\frac{3}{2} \end{cases}$$

Possiamo distinguere due casi:

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 2x-3<6+7x \end{cases} \vee \begin{cases} x<\frac{3}{2} \\ -2x+3<6+7x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x>-\frac{9}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x<\frac{3}{2} \\ x>-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x \geq \frac{3}{2} \quad \vee \quad -\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$$

Unendo le due soluzioni, otteniamo: $\boldsymbol{x>-\frac{1}{3}}$

4. $x^3+8x \geq 0$

Possiamo scomporre il polinomio, raccogliendo la x: $x(x^2+8) \geq 0$

Il secondo fattore è una somma di quadrati e, per questo motivo, sempre positivo, perciò la soluzione è: $\boldsymbol{x \geq 0}$

5. $\frac{7}{6}-\frac{7x-1}{6x-1}\leq\frac{2}{3-18x}$

$$\frac{7}{6}-\frac{7x-1}{6x-1}-\frac{2}{-3(6x-1)}\leq 0 \qquad \frac{7}{6}-\frac{7x-1}{6x-1}+\frac{2}{3(6x-1)}\leq 0$$

$$\frac{7(6x-1)-6(7x-1)+4}{6\,(6x-1)}\leq 0 \qquad \frac{42x-7-42x+6+4}{6\,(6x-1)}\leq 0 \qquad \frac{3}{6\,(6x-1)}\leq 0$$

Visto che il numeratore non contiene l'incognita, il segno della frazione dipende dal denominatore, che deve essere negativo:

$$6x-1<0 \qquad \boldsymbol{x<\frac{1}{6}}$$

Risolvi il seguente problema dopo aver impostato una disequazione:

6. In un triangolo ABC, l'angolo $C\hat{A}B$ ha ampiezza pari ai $4/5$ dell'angolo $A\hat{B}C$. Determina quali valori può assumere l'ampiezza di $C\hat{A}B$ affinché $B\hat{C}A$ sia maggiore di 90°.

Indichiamo gli angoli $C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ in funzione dell'incognita: $A\hat{B}C=\frac{5}{4}x$ $\quad C\hat{A}B=x$

Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, $C\hat{A}B=180°-A\hat{B}C-C\hat{A}B=180°-\frac{5}{4}x-x=180°-\frac{9}{4}x$

Quest'angolo deve essere maggiore di 90° e quindi, togliendo le unità di misura, otteniamo la disequazione:

$$180-\frac{9}{4}x>90 \qquad 20-\frac{1}{4}x>10 \qquad -\frac{1}{4}x>-10 \qquad \frac{1}{4}x<10 \qquad x<40°$$

E siccome l'angolo non può essere nullo, otteniamo: $\boldsymbol{0°<x<40°}$