Risolvi le seguenti equazioni:

1. $\frac{\sin 2x}{\sin x} + \cos\left(x - \frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{3}\sin x$

$$\frac{2\sin x\cos x}{\sin x} + \cos x\cos\frac{4}{3}\pi + \sin x\sin\frac{4}{3}\pi = \sqrt{3}\sin x \qquad C.A.: \sin x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq k\pi$$

$$2\cos x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \sqrt{3}\sin x \qquad 3\cos x - 3\sqrt{3}\sin x = 0 \qquad \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

È un'equazione lineare, ma anche omogenea, perciò, sapendo che per le C.A. $\sin x \neq 0$, possiamo dividere per $\sin x$ e ottenere l'equazione elementare:

$$\cot x - \sqrt{3} = 0 \qquad \cot x = \sqrt{3} \qquad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + k\pi}$$

2. $\frac{1}{\cos 2x} = 1 + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

$$\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 1 + \frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x}{\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x} \qquad \frac{1}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = 1 + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}$$

$$\frac{1}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = 1 + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \qquad 1 = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x\sin x + \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x - 2\cos x\sin x \qquad \sin^2 x + 2\cos x\sin x - \cos^2 x = 0$$

Applicando le formule di duplicazione otteniamo: $\sin 2x - \cos 2x = 0$. Si tratta di una semplice equazione lineare o di un'equazione omogenea. Verificato che $\cos 2x = 0$ non è soluzione dell'equazione, possiamo dividere per $\cos 2x$ e ottenere l'equazione elementare:

$$\tan 2x - 1 = 0 \qquad \tan 2x = 1 \qquad 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}}$$

3. $2 - \cos 2x - 2\sin^2 2x = 0$

$$2 - \cos 2x - 2\left(1 - \cos^2 2x\right) = 0 \qquad 2 - \cos 2x - 2 + 2\cos^2 2x = 0$$

$$\cos 2x\ \left(2\cos 2x - 1\right) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \qquad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$$

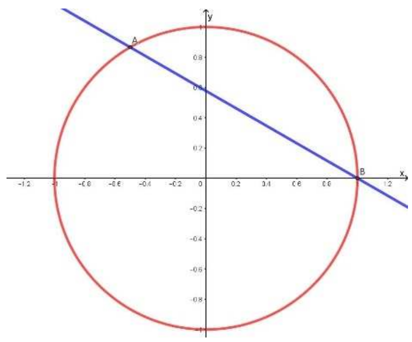
$$\cos 2x = \frac{1}{2} \qquad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi}$$

Risolvi le seguenti disequazioni:

4. $1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x \geq \left(1 + \cot^2 x\right)\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x \geq \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x \qquad x \neq k\pi$$

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x \geq \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x \qquad \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - 1 \geq 0$$



Si tratta di una disequazione lineare, che possiamo risolvere graficamente:

$$\begin{cases} X + \sqrt{3}\,Y - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = -\sqrt{3}\,Y + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad 3Y^2 - 2\sqrt{3}Y + 1 + Y^2 = 1$$

$$4Y^2 - 2\sqrt{3}Y = 0 \qquad 2Y\left(2Y - \sqrt{3}\right) = 0 \qquad \begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = -\frac{1}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$2k\pi < 2x \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \qquad \boldsymbol{k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi}$$

5. $\sin^4 x - \cos^4 x < 0$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) < 0 \qquad \sin^2 x - \cos^2 x < 0 \qquad \sin^2 x - 1 + \sin^2 x < 0$$

$$2\sin^2 x - 1 < 0 \qquad (\sin x)_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \boldsymbol{-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi}$$

6. $\sin^2 x - 3\cos^2 x \le \sin x + \sqrt{3}\cos x$

$$(\sin x - \sqrt{3}\cos x)(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \le \sin x + \sqrt{3}\cos x$$

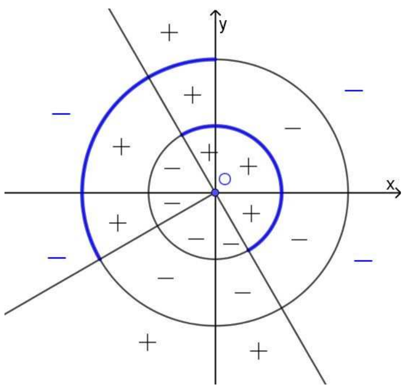
$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x - 1) \le 0$$

Studio il segno dei due fattori e poi rappresento sulla circonferenza goniometrica lo studio dei segni ponendo entrambi i fattori maggiori o uguali a zero, dopo aver studiato il segno graficamente:

$$\begin{cases} Y + \sqrt{3}X = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = -X\sqrt{3} \\ X^2 + 3X^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \pm\frac{1}{2} \\ Y = \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y - \sqrt{3}X - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = X\sqrt{3} + 1 \\ X^2 + 3X^2 + 2X\sqrt{3} + 1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = X\sqrt{3} + 1 \\ 2X\left(2X + \sqrt{3}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

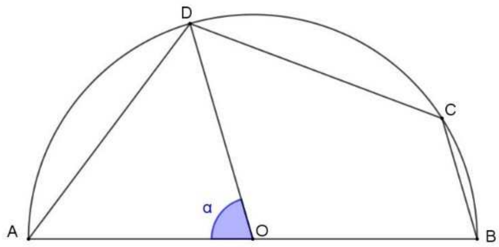


Dal grafico possiamo dedurre la soluzione:

$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi + 2k\pi}$$

7. Sia $\overline{DC} = \frac{6}{5}r$ una corda della semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, disposta in modo che D sia più vicino ad A e $\tan A\hat{O}D = \frac{24}{7}$. Determina il perimetro del quadrilatero ABCD.

Sapendo che $\tan A\hat{O}D = \tan\alpha = \frac{24}{7}$, possiamo determinare il coseno dell'angolo: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{7}{25}$.



A questo punto, possiamo determinare la lunghezza del lato AD usando il teorema del coseno o di Carnot:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{DO}^2 - 2\overline{AO}\cdot\overline{DO}\cos\alpha} = \frac{6}{5}r$$

Dato che le due corde AD e DC sono congruenti, allora anche l'angolo al centro è lo stesso. Perciò:

$$B\hat{O}C = \pi - 2\alpha$$

Sapendo che l'angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro, con il teorema della corda possiamo determinare la lunghezza del segmento BC:

$$\overline{BC} = \overline{AB}\sin C\hat{A}B = \overline{AB}\sin\frac{B\hat{O}C}{2} = \overline{AB}\sin\left(\frac{\pi - 2\alpha}{2}\right) = \overline{AB}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{AB}\cos\alpha = 2r\cdot\frac{7}{25} = \frac{14}{25}r$$

Ora ho tutti gli elementi per determinare il perimetro del quadrilatero:

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 2r + \frac{14}{25}r + \frac{6}{5}r + \frac{6}{5}r = \boldsymbol{\frac{124}{25}r}$$

8. Nel quadrilatero ABCD si sa che i lati AB, AD, BC misurano rispettivamente a, $2a$, $3a$ e che $B\hat{A}D = 90°$, $D\hat{B}C = \alpha$, essendo $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Calcola la misura del lato DC.

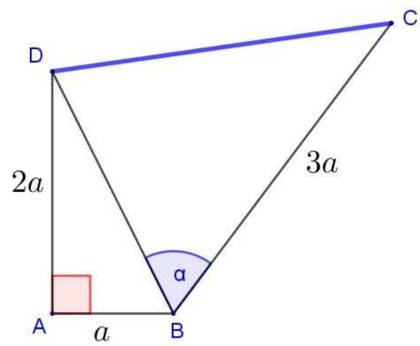
Attraverso il teorema di Pitagora, possiamo determinare la lunghezza del lato BD, ipotenusa del triangolo rettangolo ABD:

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

Possiamo quindi determinare la lunghezza del lato DC, applicando il teorema del coseno o di Carnot al triangolo DBC, conoscendo il coseno dell'angolo opposto e la lunghezza dei due lati ad esso adiacenti:

$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2\,\overline{BC}\,\overline{BD}\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{9a^2 + 5a^2 - 2 \cdot 3a \cdot a\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{8a^2} = \mathbf{2a\sqrt{2}}$$



9. Considera i due piani $\pi: 6x + y - z = 0$ e $\pi': x - y + z = 0$. Determina l'equazione del piano passante per il punto $P(2; 2; 2)$ e perpendicolare ai piani dati.

Consideriamo i parametri direttori dei piani: $(6; 1; -1)$ e $(1; -1; 1)$. I generici parametri direttori del piano da determinare sono $(a; b; c)$ e il vettore del nuovo piano deve essere perpendicolare ai vettori dei piani dati, perciò:

$$\begin{cases} 6a + b - c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \quad \overline{7a = 0} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases} \qquad (0; 1; 1)$$

Possiamo quindi determinare il piano richiesto:

$$0(x-2) + 1\,(y-2) + 1\,(z-2) = 0 \qquad \boldsymbol{y + z - 4 = 0}$$

10. Verifica che, eliminando i parametri, le equazioni $\begin{cases} x = 3t + s \\ y = s \\ z = 2 - 2t - s \end{cases}$ rappresentano un piano. Calcola poi la distanza del punto $Q(1; 2; 1)$ da tale piano.

Procedo con la sostituzione:

$$\begin{cases} x = 3t + y \\ z = 2 - 2t - y \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \dfrac{x-y}{3} \\ z = 2 - \dfrac{2}{3}(x-y) - y \end{cases} \qquad \pi: 2x + y + 3z - 6 = 0$$

Quella ottenuta è l'equazione di un piano. Determiniamo ora la distanza del punto Q dal piano, usando la formula adeguata:

$$d(Q;\,\pi) = \frac{|2 + 2 + 3 - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{14}}$$

11. Quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare utilizzando le cifre 0, 4, 6, 7, 8? Quanti di questi numeri sono divisibili per 2?

Per la cifra delle centinaia ho 4 scelte, perché non posso usare lo 0, per la cifra delle decine 4 scelte e per la cifra delle unità 3 scelte, perciò, moltiplicando tra loro, ho: $4 \cdot 4 \cdot 3 = \mathbf{48}$ numeri di tre cifre distinte.
Se voglio solo i numeri pari, devo togliere tutti quelli che finiscono per 7: $48 - 3 \cdot 3 \cdot 1 = \mathbf{39}$.

12. Un'urna contiene 5 biglie bianche, 3 rosse, 2 verdi indistinguibili al tatto. Si estraggono 3 biglie contemporaneamente.
    A. Quante sono le possibili estrazioni?
    B. Quanti sono i possibili gruppi estratti che contengono tre biglie dello stesso colore?
    C. Quanti sono i possibili gruppi estratti che contengono tre biglie di colori diversi?
    D. Quanti sono i possibili gruppi estraibili che contengono almeno una biglia bianca?

    A. Innanzi tutto, possiamo notare che non conta l'ordine. Per la prima biglia abbiamo 10 scelte, per la seconda 9, per la terza 8. Nel caso in cui esca, ad esempio, BRV, questa – visto che le biglie sono estratte contemporaneamente – è equivalente a RVB o BVR, quindi dobbiamo dividere per il numero ottenuto per il numero di combinazioni possibili: $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = \mathbf{120}$.
    B. Le tre biglie dello stesso colore che possiamo ottenere sono solo bianche o rosse (perché quelle verdi non sono abbastanza), perciò: $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!} + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3!} = 10 + 1 = \mathbf{11}$.
    C. I possibili gruppi estratti con tre biglie di colori diversi sono: $5 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{30}$.
    D. Togliamo dal numero delle possibili estrazioni determinato nel primo punto, 120, il numero delle estrazioni che non contengono biglie bianche: $120 - \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!} = 120 - 10 = \mathbf{110}$.

13. Una moneta viene lanciata cinque volte. Si calcoli la probabilità di avere 0 volte testa, di avere almeno una volta testa, di avere almeno quattro volte testa.

Usiamo il teorema delle prove ripetute di Bernoulli: per avere 0 volte testa: $\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \mathbf{\frac{1}{32}}$.
Chiedere la probabilità di avere almeno una volta testa è la probabilità contraria di non avere nessuna testa, ovvero: $1 - \frac{1}{32} = \mathbf{\frac{31}{32}}$.
La probabilità di avere almeno quattro volte testa è la somma della probabilità di avere 4 volte testa con la probabilità di avere solo teste: $\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 5 \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \mathbf{\frac{3}{16}}$.

14. Gli studenti di una scuola sono 800, dei quali 320 maschi e 480 femmine. Praticano sport il 15% tra i ragazzi e il 10% tra le ragazze. Qual è la probabilità che uno studente della scuola faccia sport? Qual è la probabilità che almeno uno che fa sport sia femmina?

I ragazzi che praticano sport sono 48 (ovvero il 15% di 320) e le ragazze che praticano sport sono 48 (ovvero il 10% di 480). La probabilità che uno studente della scuola faccia sport è: $\frac{96}{800} = \mathbf{12\%}$.
Tra tutti i ragazzi che fanno sport (96), una metà sono femmine, quindi la probabilità che almeno uno che fa sport sia femmina è del $\mathbf{50\%}$.

3	4	5	**6**	7	8
0≤x<5	5≤x<15	15≤x<25	**25≤x<35**	35≤x<45	45≤x<50