1. $\dfrac{3\,(x-1)}{5}+\dfrac{7}{6}-\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{3x+1}{2}$

$18\,(x-1)+35-10\,(x-1)=15\,(3x+1)$

$18x-18+35-10x+10=45x+15$

$37x=12 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x=\frac{12}{37}}$

2. $(x+3)(x-3)-(x-3)^2+5\left[\dfrac{x+1}{2}+x\left(2+\dfrac{1}{5}\right)\right]=\dfrac{5x+3}{2}$

$x^2-9-(x^2-6x+9)+5\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{11}{5}x\right)=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

$x^2-9-x^2+6x-9+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}+11x=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

$17x=17 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x=1}$

3. $2\,x^2-5x+3=0$

$2x^2-2x-3x+3=0$

$2x\,(x-1)-3\,(x-1)=0$

$(x-1)(2x-3)=0$

$\boldsymbol{x=1} \quad \vee \quad \boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

4. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}+5x=\dfrac{3x+7\,(x-1)}{2}+\dfrac{6}{x+1}$ $\qquad C.E.: x\neq \pm 1$

$$\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}+5x=\frac{3x+7x-7}{2}+\frac{6}{x+1}$$

$$\frac{2(x-2)+10x(x+1)}{2(x+1)}=\frac{(10x-7)(x+1)+12}{2(x+1)}$$

$2x-4+10x^2+10x=10x^2+10x-7x-7+12$

$9x=9 \quad \Longrightarrow \quad x=1 \; non\ accettabile\ per\ le\ condizioni\ di\ accettabilità \quad \Longrightarrow \quad$ ***EQUAZIONE IMPOSSIBILE***

5. $$\frac{2x-4}{x^3-6x^2+12x-8}-\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\frac{6}{x^2-4x+4}:\left(\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}\right) \qquad C.E.: x \neq 2 \wedge x \neq \pm 1$$

$$\frac{2(x-2)}{(x-2)^3}-\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\frac{6}{(x-2)^2}:\frac{3(x-1)-3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{6}{(x-2)^2}:\frac{3x-3-3x-3}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{6}{(x-2)^2}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{-6} \qquad \frac{2}{(x-2)^2}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{-x^2+1}{(x-2)^2}$$

$$\frac{2-(x-1)(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{-x^2+1}{(x-2)^2} \qquad 2-(x^2-2x-x+2)=-x^2+1$$

$$2-x^2+2x+x-2=-x^2+1 \qquad 3x=1 \qquad \boldsymbol{x=\frac{1}{3}} \qquad \mathit{accettabile}$$

6. Andrea, Bruno e Carlo devono comprare un regalo alla loro mamma. Il regalo costa 105 €. Se Bruno mette il doppio di Carlo e 5 € meno di Andrea, quanti soldi versa Andrea?

Sia x la cifra versata da Carlo, 2x la cifra versata da Bruno e 2x+5 quella versata da Andrea. Il loro totale è 105 €, perciò:

$$x+2x+2x+5=105 \quad\Rightarrow\quad 5x=100 \quad\Rightarrow\quad x=20$$

Perciò la cifra versata da Andrea è pari a $2\cdot 20+5=45$, ovvero **45€**.

7. Determina due numeri dispari consecutivi sapendo che $\frac{2}{3}$ del minore superano di 8 i $\frac{2}{5}$ del maggiore.

Possiamo indicare i due numeri come: $n_1=2x+1$ e $n_2=2x+3$, perciò l'equazione è $\frac{2}{3}n_1=8+\frac{2}{5}n_2$, ovvero:

$$\frac{2}{3}(2x+1)=8+\frac{2}{5}(2x+3) \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=4+\frac{2}{5}x+\frac{3}{5} \quad\Rightarrow\quad 10x-6x=60+9-5 \quad\Rightarrow\quad 4x=64$$

Ovvero x = 16, da cui otteniamo i due numeri dispari consecutivi: $\boldsymbol{n_1=33, n_2=35}$

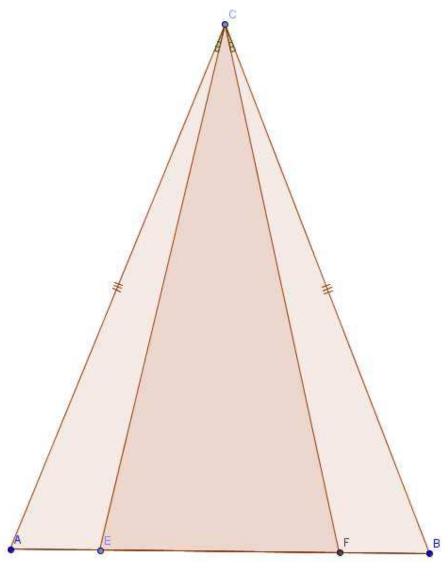
8. Considera il predicato: $p(x)$: $\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{64}(2x+3)^2$ con $x\in Q$. Determina per quale valore di x esso è vero.

Per determinare l'insieme di verità di p(x), devo risolvere l'equazione assegnata. La soluzione dell'equazione sarà il valore per cui il predicato è vero:

$$\frac{1}{16}x^2-\frac{9}{4}=\frac{1}{64}(4x^2+12x+9) \quad\Rightarrow\quad 4x^2-16\cdot 9=4x^2+12x+9 \quad\Rightarrow\quad 12x=-9-16\cdot 9$$

$$12x=-9(1+16) \quad\Rightarrow\quad 4x=-51 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x=-\frac{51}{4}}$$

9. Dato il triangolo isoscele ABC di base AB, internamente all'angolo $A\hat{C}B$ conduci due semirette di origine C, che intersechino la base nei punti E ed F, in modo che risulti $A\hat{C}E \cong B\hat{C}F$. Dimostra che il triangolo CEF è un triangolo isoscele.




Hp:
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$
$E, F \in AB$
$A\hat{C}E \cong F\hat{C}B$

Tesi:
$\overline{CE} \cong \overline{CF}$

Dimostrazione:
Consideriamo i triangoli AEC e CFB. Essi hanno:

- $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ per ipotesi
- $A\hat{C}E \cong F\hat{C}B$ per ipotesi
- $C\hat{A}E \cong C\hat{B}F$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele

$AEC \cong CFB$
per il secondo criterio di congruenza dei triangoli

Di conseguenza: $\overline{CE} \cong \overline{CF}$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

c.v.d.