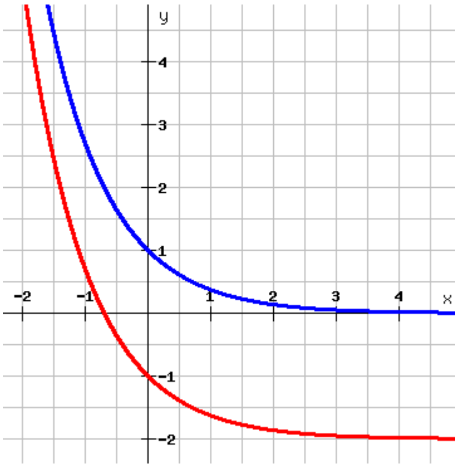
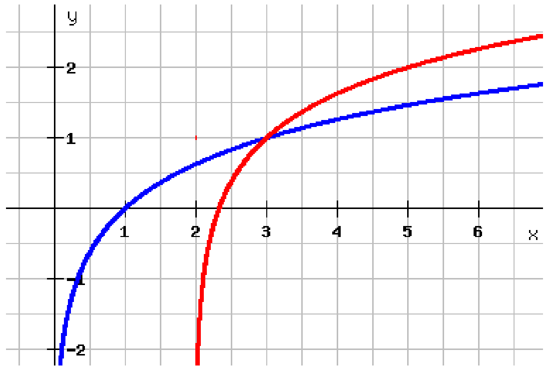
1. Dopo aver individuato il vettore di traslazione e l'equazione dell'asintoto, rappresenta le funzioni:



La funzione $y = e^{-x} - 2$ è la traslazione della funzione $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ rispetto al vettore di traslazione $\vec{v}\ (0;\ -2)$. L'asintoto ha equazione $y = -2$.



La funzione $y = \log_3(x-2) + 4$ è la traslazione della funzione $y = \log_3 x$ rispetto al vettore di traslazione $\vec{v}\ (2;\ 4)$. L'asintoto ha equazione $x = 2$.

2. Determina per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è decrescente: $y = \left(\frac{3+a}{a+2}\right)^x$.

Perché la funzione data sia decrescente, la base deve essere compresa tra 0 e 1, perciò devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{3+a}{a+2} > 0 \\ \dfrac{3+a}{a+2} < 1 \end{cases}$$

Risolvendo la prima disequazione e ponendo numeratore e denominatore maggiori di 0:

$$\begin{aligned} &N > 0:\ 3 + a > 0 \quad \Rightarrow \quad a > -3 \\ &D > 0:\ a + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > -2 \end{aligned}$$

La soluzione della prima disequazione, facendo lo studio dei segni, è: $a < -3 \ \vee \ a > -2$.

Risolvendo la seconda disequazione, faccio il minimo comune multiplo e poi risolvo:

$$\frac{3+a}{a+2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3+a-a-2}{a+2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a+2} < 0 \quad \Rightarrow \quad a < -2$$

Mettendo a sistema le soluzioni, ottengo: $\boldsymbol{a < -3}$.

3. Sapendo che: $\log_b 5 \approx 0{,}77$, $\log_b a \approx 0{,}86$, $\log_b 11 \approx 1{,}15$ calcola:

$$\log_b 55 = \log_b(5 \cdot 11) = \log_b 5 + \log_b 11 \approx 0{,}77 + 1{,}15 = \mathbf{1{,}92}$$

$$\log_b \frac{a}{55} = \log_b(a : 55) = \log_b a - \log_b 55 = \log_b a - \log_b 5 - \log_b 11 \approx 0{,}86 - 0{,}77 - 1{,}15 = \mathbf{-1{,}06}$$

$$\log_a(11b) = \frac{\log_b(11b)}{\log_b a} = \frac{\log_b 11 + 1}{\log_b a} \approx \frac{1{,}15 + 1}{0{,}86} = \mathbf{2{,}5}$$

4. Dimostra la seguente uguaglianza nell'ipotesi in cui esistano i logaritmi:

$$\log_a \frac{a}{b} + \log_{\frac{1}{a}} b = 1 - \log_a b^2$$

Applico la regola del cambiamento di base e trasformo tutti i logaritmi in base decimale, dopodiché vedo che si semplifica tutto:

$$\log_a \frac{a}{b} + \log_{\frac{1}{a}} b = \log_a a - \log_a b + \frac{\log_a b}{\log_a \frac{1}{a}} = 1 - \log_a b + \frac{\log_a b}{\log_a a^{-1}} = 1 - 2\log_a b = 1 - \log_a b^2$$

5. Determina il dominio delle seguenti funzioni:

$$y = \ln|\, x^2 - 4x \,| \qquad y = \frac{x}{\log_3(2x+1)} \qquad y = 5^{\frac{x^2-4}{x^2-1}} \qquad y = \left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\ln\,(x-5)}$$

$y = \ln|\, x^2 - 4x \,|$: il dominio consisterà nel porre l'argomento diverso da zero, visto che – essendo in valore assoluto – è sicuramente positivo:

$$x^2 - 4x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 4}$$

$y = \frac{x}{\log_3(2x+1)}$: il dominio consisterà nel porre l'argomento del logaritmo maggiore di zero e il denominatore della frazione diverso da zero:

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ \log_3(2x+1) \neq 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2x > -1 \\ 2x + 1 \neq 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x > -\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{x \neq 0} \end{cases}$$

$y = 5^{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$: devo porre il denominatore della frazione diverso da zero:

$$x^2 - 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x \neq \pm 1}$$

$y = \left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\ln(x-5)}$: in questo caso la base deve essere positiva, come pure l'argomento del logaritmo:

$$\begin{cases} \frac{2x}{x+1} > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > 0 \\ x > 5 \end{cases}$$

Mettendo a sistema i due risultati, ottengo:

$$\boldsymbol{x > 5}$$

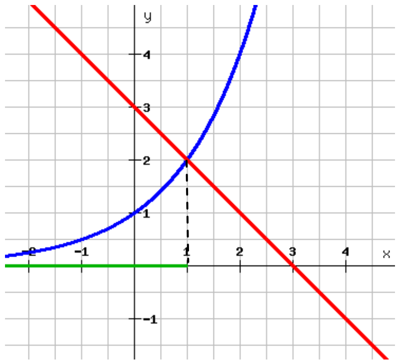
6. Risolvi la seguente disequazione utilizzando il metodo grafico:

$$2^x \leq -x+3$$

Dai due membri della disequazione, ricaviamo le equazioni di due funzioni:

$$y = 2^x \qquad \text{e} \qquad y = -x+3.$$

Dal grafico possiamo dedurre la soluzione: $\boldsymbol{x \leq 1}$.



7. Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni:

A. $\dfrac{\sqrt[3]{9^{x+1}}}{3^{3-2x}} = \dfrac{1}{81} \cdot \dfrac{3^{1+x}}{9^{x-1}}$

$$\frac{3^{\frac{2x+2}{3}}}{3^{3-2x}} = \frac{1}{3^4} \cdot \frac{3^{1+x}}{3^{2x-2}} \quad \Rightarrow \quad 3^{\frac{2x+2}{3}-3+2x} = 3^{1+x-4-2x+2} \quad \Rightarrow \quad 2x+2-9+6x = -3x-3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{4}{11}}$$

B. $9^x + 3^{2x-1} - 3^{2x-2} \leq 11$

$$3^{2x}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right) \leq 11 \quad \Rightarrow \quad 3^{2x} \cdot \frac{11}{9} \leq 11 \quad \Rightarrow \quad \frac{9^x}{9} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 9^x \leq 9^1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x \leq 1}$$

C. $4^x - 2^{x+2} - 32 > 0$

Pongo $2^x = t$ e risolvo l'equazione associata:

$$t^2 - 4t - 32 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{1} = \left\langle \begin{matrix} 8 \\ -4 \end{matrix} \right.$$

Risolvendo quindi la disequazione e sostituendo di nuovo 2^x, ottengo:

$$t < -4 \ \vee \ t > 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x < -4 \ \vee \ 2^x > 8 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x > 3}$$

D. $\begin{cases} 8^x \cdot \dfrac{2^{x^2}}{2} \leq 8 \\ 3^x \cdot \sqrt[3]{3^{4x-1}} \geq 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2^{3x} \cdot 2^{x^2-1} \leq 2^3 \\ 3^x \cdot 3^{\frac{4x-1}{3}} \geq 3^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2^{3x+x^2-1} \leq 2^3 \\ 3^{x+\frac{4x-1}{3}} \geq 3^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x+x^2-1 \leq 3 \\ 3x+4x-1 \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3x-4 \leq 0 \\ 7x \geq 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x+4)(x-1) \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -4 \leq x \leq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 1}$$

E. $log_7^2 x + log_7 x - 2 = 0$ $C.A.: x > 0$

Pongo: $log_7 x = t$:

$$t^2 + t - 2 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \langle \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$$

$$log_7 x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 7^0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x = 1}$$

$$log_7 x = -2 \quad \Longrightarrow \quad x = 7^{-2} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{1}{49}}$$

F. $\frac{1}{2}\log_2(2x-1) + \log_2(x+4) \geq \log_2 \sqrt{2x-1} + \log_2(3x-5) - 2$

Innanzi tutto risolvo le condizioni di accettabilità:

$$\begin{cases} 2x - 1 \neq 0 \\ x + 4 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ 3x - 5 > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x > -4 \\ x > \frac{1}{2} \\ x > \frac{5}{3} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{2}\log_2(2x-1) + \log_2(x+4) \geq \frac{1}{2}\log_2(2x-1) + \log_2(3x-5) - \log_2 4$$

$$\log_2 4 + \log_2(x+4) \geq \log_2(3x-5) \quad \Longrightarrow \quad \log_2(4x+4) \geq \log_2(3x-5)$$

$$4x + 4 \geq 3x - 5 \quad \Longrightarrow \quad x \geq -9$$

Mettendo a sistema con le condizioni di accettabilità, ottengo la soluzione: $\boldsymbol{x > \frac{5}{3}}$.

G. $\log_{\frac{1}{3}} \log_8(x^2 - 8) < 0$

Comincio con le equazioni di accettabilità:

$$\begin{cases} x^2 - 8 > 0 \\ \log_8(x^2 - 8) > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 8 > 0 \\ x^2 - 8 > 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 8 > 1 \quad \Longrightarrow \quad x < -3 \ \vee \ x > 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_8(x^2 - 8) < \log_{\frac{1}{3}} 1 \quad \Longrightarrow \quad \log_8(x^2 - 8) > 1 \quad \Longrightarrow \quad \log_8(x^2 - 8) > \log_8 8$$

$$x^2 - 8 > 8 \quad \Longrightarrow \quad x^2 > 16 \quad \Longrightarrow \quad x < -4 \ \vee \ x > 4$$

Mettendo a sistema la soluzione così ottenuta con le condizioni di accettabilità, otteniamo:

$$\boldsymbol{x < -4 \ \vee \ x > 4}$$