1. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente i vertici in (±3; 0) e i fuochi in (±5; 0).

Avendo i vertici in (±3; 0): $a = 3$, dato che l'asse focale è l'asse x (i fuochi si trovano sull'asse x)

Avendo i fuochi in (±5; 0): $c = 5$.

Perciò: $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$

L'equazione dell'iperbole è: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

2. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente fuochi in $(0; \pm\sqrt{37})$ ed eccentricità $\sqrt{37}$.

Avendo i fuochi sull'asse y, $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{37}}{b} = \sqrt{37} \quad \Rightarrow \quad b = 1$.

Perciò: $a^2 = c^2 - b^2 = 37 - 1 = 36$

L'equazione dell'iperbole è: $y^2 - \frac{x^2}{36} = 1$

3. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente vertici in $(0; \pm\sqrt{2})$ ed eccentricità $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Avendo i vertici in $(0; \pm\sqrt{2})$: $b = \sqrt{2}$, dato che l'asse focale è l'asse y (i fuochi si trovano sull'asse y)

$$e = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{c}{b} = \frac{c}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{3}$$

Perciò: $a^2 = c^2 - b^2 = 3 - 2 = 1$

L'equazione dell'iperbole è: $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$

4. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente i vertici in (0; ±4) e i fuochi in $(0; \pm 2\sqrt{5})$.

Avendo i vertici in (0; ±4): $b = 4$, dato che l'asse focale è l'asse y (i fuochi si trovano sull'asse y)

Avendo i fuochi in $(0; \pm 2\sqrt{5})$: $c = 2\sqrt{5}$.

Perciò: $a^2 = c^2 - b^2 = 20 - 16 = 4$

L'equazione dell'iperbole è: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

5. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente fuochi in (0; ±5) e passante per il punto $(\sqrt{3}; 4\sqrt{2})$.

Avendo i fuochi in (0; ±5): $c=5$.

Perciò: $a^2+b^2=c^2=25$

Sostituisco le coordinate del punto nella generica equazione dell'iperbole: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

$$\begin{cases} \frac{32}{b^2}-\frac{3}{a^2}=1 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} 32\,a^2-3\,b^2=a^2b^2 \\ a^2=-b^2+25 \end{cases} \quad \begin{cases} -32\,b^2+800-3\,b^2=-b^4+25\,b^2 \\ a^2=-b^2+25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^4-60\,b^2+800=0 \\ a^2=-b^2+25 \end{cases} \quad b^2=t \quad \Rightarrow \quad t^2-60\,t+800=0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2}=\frac{30\pm10}{1}=\left\langle \begin{matrix} 40 \\ 20 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} b^2=40 \\ a^2=-15 \end{cases} \quad non\ acc.$$

$$\begin{cases} b^2=20 \\ a^2=5 \end{cases} \qquad \boxed{\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{5}=1}$$

6. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente come asse traverso l'asse x, eccentricità $\frac{\sqrt{13}}{3}$ e passante per il punto $\left(4; \frac{2}{3}\sqrt{7}\right)$.

$$\begin{cases} e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3} \\ \frac{16}{a^2}-\frac{28}{9\,b^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{13}{9} \\ \frac{16}{a^2}-\frac{28}{9\,b^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 9a^2+9b^2=13\,a^2 \\ \frac{16}{a^2}-\frac{28}{9\,b^2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9b^2=4a^2 \\ \frac{16}{a^2}-\frac{28}{9\,b^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=\frac{9}{4}b^2 \\ \frac{64}{9\,b^2}-\frac{28}{9\,b^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=\frac{9}{4}b^2 \\ \frac{4}{b^2}=1 \end{cases} \qquad \boxed{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1}$$

7. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente i vertici in (±1; 0) e passante per il punto $(4; \sqrt{5})$.

Avendo i vertici in (±1; 0): $a=1$, dato che l'asse focale è l'asse x (i vertici si trovano sull'asse x).

Per ottenere la seconda condizione, sostituisco le coordinate dei punti alla generica equazione dell'iperbole:

$$\begin{cases} a=1 \\ 16-\frac{5}{b^2}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ -\frac{5}{b^2}=-15 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b^2=\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \boxed{x^2-3\,y^2=1}$$

8. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente come asse focale l'asse x e passante per i punti $(-3;-2)$ e $(\sqrt{6};\sqrt{2})$.

La generica equazione dell'iperbole è: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, avendo come asse focale l'asse x.

Sostituisco le coordinate dei punti nella generica equazione e metto a sistema:

$$\begin{cases}\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{6}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{9}{a^2}-\frac{12}{a^2}+2=1\\ \frac{2}{b^2}=\frac{6}{a^2}-1\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{3}{a^2}=1\\ \frac{2}{b^2}=\frac{6}{a^2}-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2=3\\ \frac{2}{b^2}=\frac{6}{3}-1\end{cases}\qquad \begin{cases}a^2=3\\ \frac{2}{b^2}=1\end{cases}\qquad \begin{cases}a^2=3\\ b^2=2\end{cases}\qquad \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$$

9. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente come asse focale l'asse x, passante per $\left(5;\frac{3}{4}\right)$ e avente come asintoti le rette $y=\pm\frac{1}{4}x$.

La generica equazione dell'iperbole è: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, avendo come asse focale l'asse x.

Sostituisco le coordinate del punto nella generica equazione e metto a sistema con la condizione degli asintoti:

$$\begin{cases}\frac{25}{a^2}-\frac{9}{16\,b^2}=1\\ \frac{1}{4}=\frac{b}{a}\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{25}{16\,b^2}-\frac{9}{16\,b^2}=1\\ a=4b\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{16}{16\,b^2}=1\\ a=4b\end{cases}$$

$$\begin{cases}b^2=1\\ a^2=16b^2\end{cases}\qquad \begin{cases}b^2=1\\ a^2=16\end{cases}\qquad \frac{x^2}{16}-y^2=1$$

10. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria e passante per il punto (4; 1).

L'iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria ha equazione: $x^2-y^2=\pm a^2$.

Sostituisco le coordinate del punto nella generica equazione:

$16-1=a^2$ $\qquad x^2-y^2=15$

11. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti, passante per il punto (1; 2)

L'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti ha equazione $x\,y=k$

Sostituendo le coordinate del punto: $\qquad x\,y=2$

12. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti, avente vertice in (2; 2).

L'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti ha equazione $x\,y = k$

Sostituendo le coordinate del vertice: $\boxed{x\ y = 4}$

13. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera traslata avente centro di simmetria nel punto (1; -3) e passante per il punto (-1; -1).

L'iperbole equilatera traslata ha equazione: $y = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$ che posso anche scrivere (dividendo numeratore e denominatore per c, come: $y = \dfrac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$

Il centro di simmetria ha coordinate generiche: $\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$, perciò: $y = \dfrac{-3x + \frac{b}{c}}{x - 1}$

A questo punto sostituisco le coordinate del punto per determinare $\dfrac{b}{c}$: $-1 = \dfrac{3 + \frac{b}{c}}{-1 - 1} \Rightarrow \dfrac{b}{c} = -1$

L'equazione dell'iperbole è: $\boxed{y = \dfrac{3x + 1}{1 - x}}$

14. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera traslata avente per asintoti le rette $x = -8$ e $y = -5$ e passante per $\left(4; -\dfrac{7}{6}\right)$.

L'iperbole equilatera traslata ha equazione: $y = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$ che posso anche scrivere (dividendo numeratore e denominatore per c, come: $y = \dfrac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$

Gli asintoti hanno equazioni generiche: $x = -\dfrac{d}{c}; \ y = \dfrac{a}{c}$, perciò: $y = \dfrac{-5x + \frac{b}{c}}{x + 8}$

A questo punto sostituisco le coordinate del punto per determinare $\dfrac{b}{c}$: $-\dfrac{7}{6} = \dfrac{-20 + \frac{b}{c}}{4 + 8} \Rightarrow \dfrac{b}{c} = 6$

L'equazione dell'iperbole è: $\boxed{y = \dfrac{6 - 5x}{x + 8}}$