15. Determina le coordinate dei punti di intersezione fra l'iperbole $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = -1$ e la retta $y = x\sqrt{6}$.

Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = -1 \\ y = x\sqrt{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{3x^2}{2} = -1 \\ y = x\sqrt{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2 = -1 \\ y = x\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -\sqrt{6} \end{cases} \qquad \boxed{P\,(1;\sqrt{6}) \quad Q\,(-1;-\sqrt{6})}$$

16. Determina le equazioni delle rette tangenti all'iperbole $x^2 - 9y^2 = 9$ e parallele alla bisettrice di secondo e quarto quadrante.

La generica retta parallela alla bisettrice di secondo e quarto quadrante ha equazione: $x + y + q = 0$ e metto a sistema questa equazione con quella dell'iperbole, ponendo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 9 \\ x = -y - q \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 + 2yq + q^2 - 9y^2 = 9 \\ x = -y - q \end{cases} \qquad 8y^2 - 2yq + 9 - q^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = q^2 - 72 + 8q^2 = 0 \qquad 9q^2 - 72 = 0 \qquad q = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{x + y \pm 2\sqrt{2} = 0}$$

17. Determina le equazioni delle rette tangenti all'iperbole $4x^2 - y^2 - 9 = 0$ nei suoi punti di ascissa 2.

Innanzi tutto determino le coordinate dei punti dell'iperbole che hanno ascissa 2, sostituendo il valore dell'ascissa nell'equazione dell'iperbole:

$$16 - y^2 - 9 = 0 \qquad y^2 = 7 \qquad P\,(2;\sqrt{7}) \quad Q\,(2;-\sqrt{7})$$

Applico la regola dello sdoppiamento per determinare le equazioni delle tangenti:

$$\boxed{8x \pm \sqrt{7}\,y - 9 = 0}$$

18. Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole $3x^2 - y^2 = 1$ condotte dal punto (0; 1).

Verifico innanzi tutto che il punto non appartenga all'iperbole, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione dell'iperbole e vedendo che non risulta un'identità: $3 \cdot 0 - 1 \neq 1$.

Perciò non posso applicare la regola dello sdoppiamento: determino l'equazione della generica retta passante per il punto, la metto a sistema con quella dell'iperbole e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = mx + 1 \\ 3x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx + 1 \\ 3x^2 - m^2x^2 - 2mx - 1 = 1 \end{cases} \qquad (3 - m^2)\,x^2 - 2mx - 2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = m^2 + 6 - 2m^2 = 0 \qquad m^2 = 6 \qquad m = \pm\sqrt{6} \qquad \boxed{y = \pm x\sqrt{6} + 1}$$

19. Determina per quali valori di $h \in R$ la retta del fascio $y = 2x + h$ interseca l'iperbole $x^2 - y^2 = 9$.

Metto a sistema le due equazioni e pongo $\Delta \geq 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = 2x + h \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x + h \\ x^2 - 4x^2 - 4xh - h^2 = 9 \end{cases} \qquad 3x^2 + 4xh + h^2 + 9 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4h^2 - 3h^2 - 27 \geq 0 \qquad h^2 \geq 27 \qquad h \leq -3\sqrt{3} \ \vee \ h \geq 3\sqrt{3}$$

20. Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un vertice in (4; 0) ed eccentricità uguale a 9/8.

$$\begin{cases} a = 4 \\ \frac{c}{a} = \frac{9}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 4 \\ c = \frac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 16 \\ a^2 + b^2 = \frac{81}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = \frac{81}{4} - 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = \frac{17}{4} \end{cases} \qquad \frac{x^2}{16} - \frac{4y^2}{17} = 1 \qquad 17\,x^2 - 64\,y^2 = 272$$

21. Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha vertice in $(\sqrt{2}; 0)$ e passa per $P\,(-\sqrt{3}; \sqrt{6})$.

Avendo le coordinate di un vertice, ho già il valore del coefficiente a. Sostituisco le coordinate del punto P nell'equazione generica dell'iperbole che è del tipo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ \frac{3}{a^2} - \frac{6}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 2 \\ \frac{3}{2} - \frac{6}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 2 \\ \frac{6}{b^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 2 \\ \frac{b^2}{6} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 12 \end{cases} \qquad \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{12} = 1 \qquad 6x^2 - y^2 = 12$$

22. Scrivi l'equazione dell'iperbole (riferita ai propri assi) avente l'asse x come asse traverso, per asintoti le rette 2x – 3y = 0, 2x + 3y = 0 e passante per il punto $P\left(\frac{9}{2}; \sqrt{5}\right)$.

I due asintoti in forma esplicita diventano: $y = \pm\frac{2}{3}x$. Perciò, usando l'equazione degli asintoti e imponendo il passaggio dell'iperbole per il punto P (cioè sostituendo le sue coordinate nella generica equazione), ottengo:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \\ \frac{81}{4a^2} - \frac{5}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{3}{2}b \\ \frac{9}{b^2} - \frac{5}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = \frac{9}{4}b^2 \\ \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1}$$

23. Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x, sapendo che:
   a. passa per $(3\sqrt{2}; 1)$ e per $(-6; \sqrt{3})$
   b. passa per (–3; 2) e (4; –3)
   c. ha per vertice (–1; 0) e per fuoco $(\sqrt{10}; 0)$
   d. ha per vertice (0; 4) e per fuoco $(-\sqrt{41}; 0)$

i. Sapendo che passa per due punti, nell'equazione generica dell'iperbole con i fuochi sull'asse x: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sostituisco le coordinate dei punti e risolvo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{18}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{36}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} \begin{cases} \frac{36}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 2 \\ \frac{36}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \\ \hline \frac{1}{b^2} = 1 \end{array} \qquad \begin{cases} b^2 = 1 \\ \frac{18}{a^2} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9} - y^2 = 1}$$

ii. Sapendo che passa per due punti, nell'equazione generica dell'iperbole con i fuochi sull'asse x: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sostituisco le coordinate dei punti e risolvo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2} - \dfrac{4}{b^2} = 1 \\ \dfrac{16}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{9}{a^2} - 1\right) \\ \dfrac{16}{a^2} - \dfrac{9}{4}\left(\dfrac{9}{a^2} - 1\right) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{9}{a^2} - 1\right) \\ \dfrac{16}{a^2} - \dfrac{81}{4a^2} + \dfrac{9}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{9}{a^2} - 1\right) \\ \dfrac{17}{a^2} = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{9}{17}\cdot 5 - 1\right) \\ a^2 = \dfrac{17}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = \dfrac{17}{5} \\ b^2 = \dfrac{17}{7} \end{cases}$$

$$\boxed{5x^2 - 7y^2 = 17}$$

iii. $\begin{cases} a = 1 \\ c = \sqrt{10} \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 9 \end{cases} \qquad \boxed{9x^2 - y^2 = 9}$

iv. $\begin{cases} b = 4 \\ c = \sqrt{41} \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = 16 \\ a^2 + b^2 = 41 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \qquad \boxed{\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1}$

24. Scrivi l'equazione dell'iperbole riferita agli assi, con asse focale sull'asse x, sapendo che a + b = 17 e che la distanza focale è 26.

$$\begin{cases} a + b = 17 \\ c = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = 17 \\ a^2 + b^2 = 169 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = 17 \\ (a+b)^2 - 2ab = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 17 \\ 289 - 2ab = 169 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = 17 \\ ab = 60 \end{cases} \qquad t^2 - 17t + 60 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} \left\langle \begin{matrix} 12 \\ 5 \end{matrix} \right.$$

$$\boxed{\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1}$$