

25. Determina le coordinate degli eventuali punti comuni alla retta e all'iperbole di equazioni:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } 9x^2 - 4y^2 = 36 & 3x + 2y = 6 \\
 \text{b. } 9x^2 - 25y^2 = 225 & x - y - 1 = 0 \\
 \text{c. } 3x^2 - 7y^2 - 20 = 0 & x + 7y - 10 = 0
 \end{array}$$

Metto a sistema l'equazione dell'iperbole con quella della retta:

$$\text{a. } \begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 36 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y + 2 \\ 9\left(-\frac{2}{3}y + 2\right)^2 - 4y^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}y + 2 \\ 9\left(\frac{4}{9}y^2 + 4 - \frac{4}{3}y\right) - 4y^2 = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y + 2 \\ 4y^2 + 36 - 12y - 4y^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}y + 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{la retta è tangente all'iperbole:} \quad \mathbf{A(2; 0)}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 9x^2 - 25y^2 = 225 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + 1 \\ 9(y^2 + 2y + 1) - 25y^2 = 225 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ 9y^2 + 18y + 9 - 25y^2 = 225 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + 1 \\ 8y^2 - 9y + 108 = 0 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 864}}{16} \quad \text{la retta è esterna all'iperbole}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 3x^2 - 7y^2 - 20 = 0 \\ x + 7y - 10 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7y + 10 \\ 3(-7y + 10)^2 - 7y^2 - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y + 10 \\ 3(49y^2 - 140y + 100) - 7y^2 - 20 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7y + 10 \\ 147y^2 - 420y + 300 - 7y^2 - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y + 10 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \mathbf{C_1(3; 1) \quad C_2(-4; 2)}$$

26. Determina  $m$  in modo che la retta  $y = mx - 1$  sia tangente all'iperbole  $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$ .

Metto a sistema le due equazioni e pongo  $\Delta = 0$  nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = mx - 1 \\ 3x^2 - 4y^2 - 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = mx - 1 \\ 3x^2 - 4(mx - 1)^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 - 4(m^2x^2 - 2mx + 1) - 12 = 0 \qquad 3x^2 - 4m^2x^2 + 8mx - 4 - 12 = 0$$

$$x^2(3 - 4m^2) + 8mx - 16 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 16m^2 + 16(3 - 4m^2) = 0$$

$$m^2 + 3 - 4m^2 = 0 \qquad \qquad \qquad m = \pm 1$$

27. Determina  $b$  in modo che l'iperbole  $\frac{x^2}{30} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  risulti tangente alla retta di equazione  $x - y - 5 = 0$ .

$$\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ \frac{x^2}{30} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + 5 \\ \frac{x^2}{30} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \frac{y^2 + 10y + 25}{30} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2y^2 + 10b^2y + 25b^2 - 30y^2 = 30b^2 \qquad (b^2 - 30)y^2 + 10b^2y - 5b^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 25b^4 + 5b^2(b^2 - 30) = 0 \qquad 5b^2 + b^2 - 30 = 0$$

$$6b^2 = 30 \qquad \qquad \qquad b = \sqrt{5}$$

28. Determina l'equazione, riferita agli assi, dell'iperbole equilatera passante per il punto  $P(5; 4)$ .

L'iperbole equilatera riferita agli assi è del tipo:  $x^2 - y^2 = \pm a^2$ . Sostituisco le coordinate del punto nella generica equazione, per determinare  $a$ :

$$25 - 16 = 9 \qquad \qquad \qquad x^2 - y^2 = 9$$

29. Determina l'equazione, riferita ai suoi asintoti, dell'iperbole equilatera passante per il punto  $P(-2; 4)$ .

L'iperbole equilatera riferita agli assi è del tipo:  $xy = k$ . Sostituisco le coordinate del punto nella generica equazione, per determinare  $k$ :

$$-2 \cdot 4 = -8 \qquad \qquad \qquad xy = -8$$

30. Data l'iperbole  $xy = 6$  e la retta  $x + y + k = 0$ , determina  $k$  in modo che la retta sia tangente alla curva.

Metto a sistema le due equazioni e pongo  $\Delta = 0$  nella risolvente, per determinare il valore di  $k$ :

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y + k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(-y - k) = 6 \\ x = -y - k \end{cases} \quad y^2 + ky + 6 = 0$$

$$\Delta = k^2 - 24 = 0$$

$$k = \pm 2\sqrt{6}$$

31. Determina l'equazione dell'iperbole di equazione  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  sapendo che passa per i punti A (0; -2), B (1; 1/2) e

C (-1; -3/4)

Divido sia numeratore che denominatore per  $c$ :  $y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$

Sostituisco nell'equazione le coordinate dei tre punti, in questo modo determino:  $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{d}{c}$ :

$$\begin{cases} -2 = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{d}{c}} = \frac{b}{d} \\ \frac{1}{2} = \frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}{1 + \frac{d}{c}} \\ -\frac{3}{4} = \frac{-\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}{-1 + \frac{d}{c}} \end{cases} \quad \begin{cases} b = -2d \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{d}{c}\right) = \frac{a}{c} - \frac{2d}{c} \\ -\frac{3}{4} \left(-1 + \frac{d}{c}\right) = -\frac{a}{c} - \frac{2d}{c} \end{cases} \quad \text{sommo seconda e terza equazione:}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{d}{2c} + \frac{3}{4} - \frac{3d}{4c} = -\frac{4d}{c} \quad \frac{15d}{4c} = -\frac{5}{4} \quad \frac{d}{c} = -\frac{1}{3}$$

Sostituisco il valore così ottenuto nella seconda equazione:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{a}{c} + \frac{2}{3} \quad \frac{a}{c} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \quad \frac{a}{c} = -\frac{1}{3}$$

Dalla prima equazione ottengo:  $\frac{b}{c} = -2 \frac{d}{c} = \frac{2}{3}$

L'equazione dell'iperbole diventa:  $y = \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x - \frac{1}{3}}$  ovvero:  $y = \frac{2 - x}{3x - 1}$