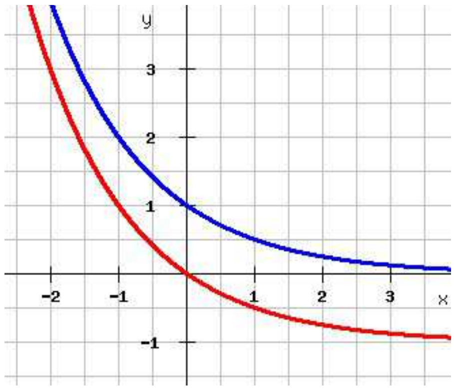
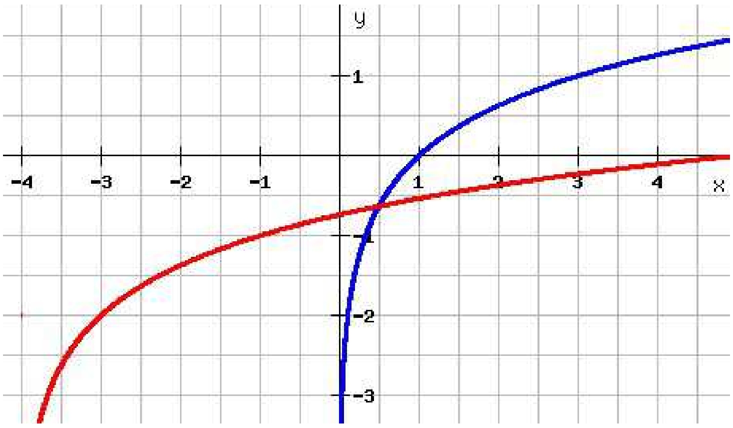
1. Dopo aver individuato il vettore di traslazione e l'equazione dell'asintoto, rappresenta le funzioni:



La funzione $y = 2^{-x} - 1$ è la traslazione della funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ rispetto al vettore di traslazione $\vec{v}\ (0;\ -1)$. L'asintoto ha equazione $y = -1$.



La funzione $y = \log_3(x+4) - 2$ è la traslazione della funzione $y = \log_3 x$ rispetto al vettore di traslazione $\vec{v}\ (-4;\ -2)$. L'asintoto ha equazione $x = -4$.

2. Determina per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è decrescente: $y = \left(\frac{3-a}{a+1}\right)^x$.

Perché la funzione data sia decrescente, la base deve essere compresa tra 0 e 1, perciò devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{3-a}{a+1} > 0 \\ \dfrac{3-a}{a+1} < 1 \end{cases}$$

Risolvendo la prima disequazione e ponendo numeratore e denominatore maggiori di 0:

$$N > 0:\ 3 - a > 0 \quad \Rightarrow \quad a < 3$$
$$D > 0:\ a + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > -1$$

La soluzione della prima disequazione, facendo lo studio dei segni, è: $-1 < a < 3$.

Risolvendo la seconda disequazione, faccio il minimo comune multiplo e poi pongo numeratore e denominatore maggiori di 0:

$$\frac{3-a}{a+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3-a-a-1}{a+1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2-2a}{a+1} < 0$$
$$N > 0:\ 2 - 2a > 0 \quad \Rightarrow \quad a < 1$$
$$D > 0:\ a + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > -1$$

La soluzione della prima disequazione, facendo lo studio dei segni, è: $a < -1 \ \vee \ a < 1$.

Mettendo a sistema le soluzioni, ottengo: $\mathbf{1} < a < 3$.

3. Sapendo che: $\log_b 2 \approx 0{,}43$, $\log_b 3 \approx 0{,}68$, $\log_b 7 \approx 1{,}21$ calcola:

$$\log_b 21 = \log_b(3 \cdot 7) = \log_b 3 + \log_b 7 \approx 0{,}68 + 1{,}21 = \mathbf{1,89}$$

$$\log_b \frac{6}{7} = \log_b(6 : 7) = \log_b 6 - \log_b 7 = \log_b 2 + \log_b 3 - \log_b 7 \approx 0{,}43 + 0{,}68 - 1{,}21 = \mathbf{-0,10}$$

$$\log_2(7b) = \log_2 7 + \log_2 b = \frac{\log_b 7}{\log_b 2} + \frac{\log_b b}{\log_b 2} \approx \frac{1{,}21}{0{,}43} + \frac{1}{0{,}43} = \mathbf{5,14}$$

4. Dimostra la seguente uguaglianza nell'ipotesi in cui esistano i logaritmi:

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a = 1$$

Applico la regola del cambiamento di base e trasformo tutti i logaritmi in base decimale, dopodiché vedo che si semplifica tutto:

$$\frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log c}{\log b} \cdot \frac{\log d}{\log c} \cdot \frac{\log a}{\log d} = 1$$

5. Determina il dominio delle seguenti funzioni:

$$y = \ln|\, x^2 - 4 \,| \qquad y = \frac{x}{\log_3(x-1)} \qquad y = 5^{\ln\frac{x^2-4}{x^2+1}} \qquad y = \left(\ln\frac{2x}{x+1}\right)^{x-5}$$

$y = \ln|\, x^2 - 4 \,|$: il dominio consisterà nel porre l'argomento diverso da zero, visto che – essendo in valore assoluto – è sicuramente positivo:

$$x^2 - 4 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x \neq \pm 2}$$

$y = \frac{x}{\log_3(x-1)}$: il dominio consisterà nel porre l'argomento del logaritmo maggiore di zero e il denominatore della frazione diverso da zero:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ \log_3(x-1) \neq 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x > 1} \\ \boldsymbol{x \neq 2} \end{cases}$$

$y = 5^{\ln\frac{x^2-4}{x^2+1}}$: devo porre l'argomento del logaritmo maggiore di 0, ma siccome il denominatore, in quanto somma di due quadrati, è sempre positivo, basta porre il numeratore maggiore di zero, cioè:

$$x^2 - 4 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x < -2} \ \vee \ \boldsymbol{x > 2}$$

$y = \left(\ln\frac{2x}{x+1}\right)^{x-5}$: in questo caso l'argomento del logaritmo deve essere positivo e la base dell'esponenziale deve essere positiva a sua volta, cioè:

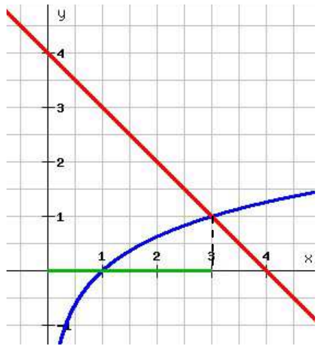
$$\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} > 0 \\ \ln\dfrac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} > 0 \\ \dfrac{2x}{x+1} > 1 \end{cases}$$

Siccome la seconda disequazione contiene la prima, risolvo solo la seconda disequazione:

$$\frac{2x - x - 1}{x+1} > 0 \qquad \begin{matrix} N > 0: & x > 1 \\ D > 0: & x > -1 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{x < -1} \ \vee \ \boldsymbol{x > 1}$$

6. Risolvi la seguente disequazione utilizzando il metodo grafico:

$$\log_3 x \leq -x+4$$



Dai due membri della disequazione, ricaviamo le equazioni di due funzioni:

$$y=\log_3 x \qquad \text{e} \qquad y=-x+4.$$

Dal grafico possiamo dedurre la solUzione: $\mathbf{0} < x \leq 3.$

7. Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni:

A. $\frac{9^{x+1}}{27^{3-2x}}=\frac{1}{81}\cdot 3^{1+x}$

$$\frac{3^{2x+2}}{3^{9-6x}}=\frac{1}{3^4}\cdot 3^{1+x} \quad \Longrightarrow \quad 3^{2x+2-9+6x}=3^{1+x-4} \quad \Longrightarrow \quad 8x-7=x-3 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x=\frac{4}{7}}$$

B. $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}\leq 7$

$$2^x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\leq 7 \quad \Longrightarrow \quad 2^x\cdot\frac{7}{4}\leq 7 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2^x}{4}\leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 2^{x-2}\leq 2^0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x\leq 2}$$

C. $4^x-3\cdot 2^x+2<0$

Pongo $2^x=t$ e risolvo l'equazione associata:

$$t^2-3t+2=0 \qquad t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\left\langle\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$$

Risolvendo quindi la disequazione e sostituendo di nuovo 2^x, ottengo:

$$1<t<2 \quad \Longrightarrow \quad 2^0<2^x<2^1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{0}<x<1$$

D. $\begin{cases}8^x\cdot 4^y=128\\81^y=27\cdot 3^x\end{cases}$

$$\begin{cases}2^{3x}\cdot 2^{2y}=2^7\\3^{4y}=3^3\cdot 3^x\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases}2^{3x+2y}=2^7\\3^{4y}=3^{3+x}\end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases}3x+2y=7\\x-4y=-3\end{cases}$$

$$\begin{array}{c}\begin{cases}6x+4y=14\\x-4y=-3\end{cases}\\\hline 7x=11\end{array} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{11}{7} \qquad y=\frac{\frac{11}{7}+3}{4}=\frac{8}{7} \qquad \begin{cases}\boldsymbol{x=\frac{11}{7}}\\\boldsymbol{y=\frac{8}{7}}\end{cases}$$

E. $log_3^2 x + log_3 x - 6 = 0$ $\qquad C.A.: x > 0$

Pongo: $log_3 x = t$:

$$t^2 + t - 6 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \langle\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

$$log_3 x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 3^2 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x = 9}$$

$$log_3 x = -3 \quad \Longrightarrow \quad x = 3^{-3} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{1}{27}}$$

F. $\log_2(x-2)^2 + \log_2(x+1) \geq 2\log_2(x-2) + \log_2(3x-2) - 1$

Innanzi tutto risolvo le condizioni di accettabilità:

$$\begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x + 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ 3x - 2 > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x > 2$$

$$2\log_2(x-2) + \log_2(x+1) \geq 2\log_2(x-2) + \log_2(3x-2) - \log_2 2$$

$$\log_2 2 + \log_2(x+1) \geq \log_2(3x-2) \quad \Longrightarrow \quad \log_2(2x+2) \geq \log_2(3x-2)$$

$$2x + 2 \geq 3x - 2 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 4$$

Mettendo a sistema con le condizioni di accettabilità, ottengo la soluzione: $\mathbf{2} < x \leq 4$.

G. $\log\log\,(x^2 - 15) < 0$

Comincio con le equazioni di accettabilità:

$$\begin{cases} x^2 - 15 > 0 \\ \log\,(x^2 - 15) > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 15 > 0 \\ x^2 - 15 > 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 15 > 1 \quad \Longrightarrow \quad x < -4 \;\vee\; x > 4$$

$$\log\log\,(x^2 - 15) < \log 1 \quad \Longrightarrow \quad \log\,(x^2 - 15) < 1 \quad \Longrightarrow \quad \log\,(x^2 - 15) < \log\,10$$

$$x^2 - 15 < 10 \quad \Longrightarrow \quad x^2 < 25 \quad \Longrightarrow \quad -5 < x < 5$$

Mettendo a sistema la soluzione così ottenuta con le condizioni di accettabilità, otteniamo:

$$\mathbf{-5} < x < -4 \;\vee\; 4 < x < 5$$