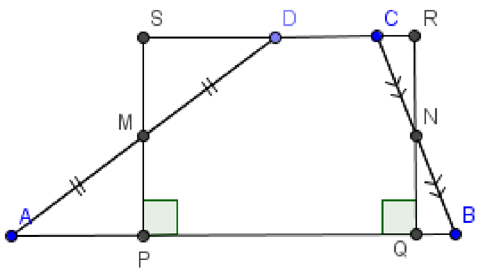
1. Dimostra la seguente equivalenza tra superfici, usando le ipotesi indicate:



Ipotesi: $DC \parallel AB$
$SP \perp AB$
$RQ \perp AB$
$AM \cong MD$
$CN \cong NB$

Tesi: $ABCD \doteq PQRS$

Il quadrilatero ABCD è costituito dall'esagono PQNCDM e dai triangoli QBN e APM.
Il quadrilatero PQRS è costituito dall'esagono PQNCDM e dai triangoli RCN e DSM.
Per dimostrare che sono equicomposti, basta dimostrare che $QBN \cong RCN$ e $APM \cong DSM$.

Considero i triangoli QBN e RCN. Essi hanno:

- $CN \approx NB$ per ipotesi
- $N\hat{Q}B \cong N\hat{R}C$ perché entrambi retti. Infatti, per ipotesi $DC \parallel AB$ e $RQ \perp AB$, perciò $RQ \perp DC$
- $Q\hat{N}B \cong R\hat{N}C$ perché angoli opposti al vertice

Per il secondo criterio generalizzato, i due triangoli sono congruenti.

Considero i triangoli APM e DSM. Essi hanno:

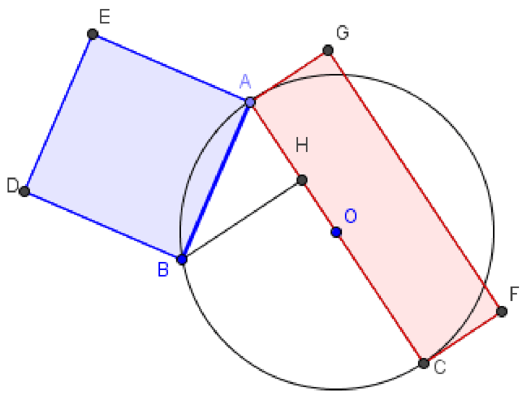
- $AM \approx MD$ per ipotesi
- $A\hat{P}M \cong M\hat{S}D$ perché entrambi retti. Infatti, per ipotesi $DC \parallel AB$ e $SP \perp AB$, perciò $SP \perp DC$
- $P\hat{M}A \cong S\hat{M}D$ perché angoli opposti al vertice

Per il secondo criterio generalizzato, i due triangoli sono congruenti.

c.v.d.

2. Dimostra che in una circonferenza il quadrato costruito su una corda AB, non passante per il centro, è equivalente al rettangolo i cui lati sono congruenti alla proiezione della corda sul diametro AC e al diametro stesso.

Considero il triangolo ABC: esso, avendo un lato (AC) coincidente con il diametro della circonferenza, è rettangolo in B. Perciò il quadrato costruito sulla corda AB è, di fatto, il quadrato costruito su uno dei cateti e il rettangolo avente per dimensioni la proiezione della corda sul diametro e il diametro stesso è, in altre parole, il rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa (AC) e la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa (AH).
Questo coincide con il primo Teorema di Euclide, secondo il quale:

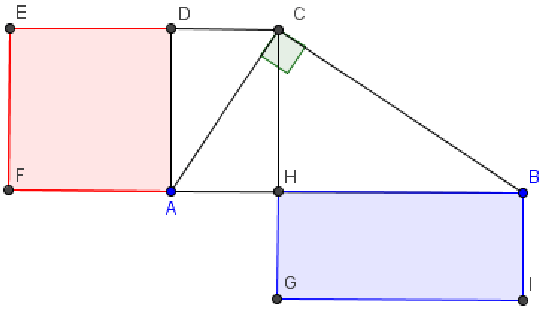


In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.

3. Disegna un trapezio rettangolo con la diagonale minore perpendicolare al lato obliquo. Dimostra che il quadrato costruito sull'altezza è equivalente al rettangolo le cui dimensioni sono congruenti alla base minore e alla differenza delle basi del trapezio.

Considero il triangolo ABC: esso è, per ipotesi, rettangolo in C. Perciò il quadrato costruito sull'altezza del trapezio DA è, di fatto, il quadrato costruito sull'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa (CH, visto che $DA \cong CH$) e il rettangolo avente per dimensioni la base minore e la differenza tra le basi del trapezio è, in altre parole, il rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, visto che $CD \cong AH$ e $HB \cong AB - AH \cong AB - DC$.
Questo coincide con il secondo Teorema di Euclide, secondo il quale:

In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



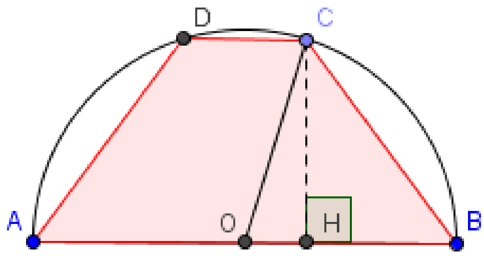
4. Un trapezio isoscele, inscritto in una semicirconferenza di raggio 50 cm, ha la base minore di 28 cm. Determina il perimetro e l'area del trapezio.

Dato che la base maggiore del trapezio misura 100 cm (essendo il diametro della semicirconferenza) e la base minore misura 28 cm, posso determinare la misura del segmento HB, semidifferenza tra le due basi, dove H è il piede dell'altezza condotta dal vertice C:

$$HB = \frac{AB - DC}{2} = 36\ cm$$

Perciò il segmento OH ha misura:

$$OH = OB - HB = 14\ cm$$



Considero il triangolo OCH, rettangolo in H. Posso determinare CH, ovvero l'altezza del trapezio, con il teorema di Pitagora:

$$CH = \sqrt{CO^2 - OH^2} = 48\ cm$$

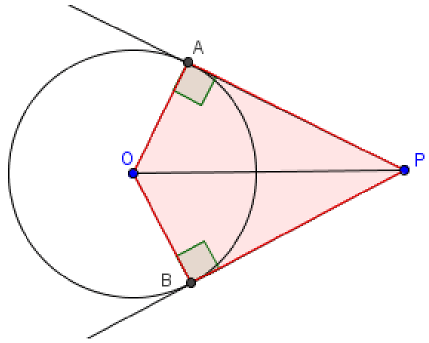
Considero poi il triangolo CHB, rettangolo in H, per determinare CB con il teorema di Pitagora:

$$CB = \sqrt{CH^2 + HB^2} = 60\ cm$$

A questo punto, ho tutti gli elementi per determinare perimetro e area del trapezio:

$$2p = AB + CD + 2 \cdot CB = \mathbf{248\ cm} \qquad \mathcal{A} = \frac{(AB + CD) \cdot CH}{2} = \mathbf{3072\ cm^2}$$

5. Dal punto P distante 20 cm dal centro di una circonferenza di centro O, conduci le due tangenti, che toccano la circonferenza in A e in B. Sapendo che i segmenti PA e PB sono i 4/3 del raggio, determina il perimetro e l'area del quadrilatero PAOB.



Indico il raggio OA della circonferenza con x, perciò $PA = PB = \frac{4}{3}x$. Posso applicare il teorema di Pitagora al triangolo OPA, visto che è rettangolo in A (infatti, il raggio condotto dal centro al punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente):

$$AO^2 + AP^2 = OP^2$$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 400 \qquad \frac{25}{9}x^2 = 400 \qquad x = \pm 12$$

Il raggio OA può avere solo misura positiva, perciò misura 12 cm e il segmento PA 16 cm.

Ora abbiamo tutti gli elementi per determinare perimetro e area del quadrilatero PAOB. Calcolo l'area come doppio dell'area del triangolo PAO, visto che i triangoli PAO e PBO sono congruenti:

$$2p = 2 \cdot AO + 2 \cdot AP = \mathbf{56\ cm} \qquad \mathcal{A} = AP \cdot AO = \mathbf{192\ cm^2}$$