1. Determina il dominio della seguente funzione:

$$f(x)=\sqrt{3x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{\sqrt{x^2+8}}{x^2-4}$$

Ricordando che l'argomento di un radicale di indice pari deve essere non negativo e che il denominatore di una frazione deve essere diverso da zero, otteniamo:

$$\begin{cases}3x+1\geq 0\\ x^2+x+1\neq 0\\ x^2+8\geq 0\\ x^2-4\neq 0\end{cases}\qquad \begin{cases}x\geq -\frac{1}{3}\\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \forall x\in\mathbb{R}\\ x\neq\pm 2\end{cases}\qquad \boldsymbol{D=\left[-\frac{1}{3};2\right[\ \cup\ ]2;\ +\infty[}$$

Ricordando che la seconda e la terza disequazione sono sempre verificate, in quanto la seconda è un falso quadrato (quindi non solo diverso da zero per qualsiasi valore reale di x, ma anche maggiore di zero) e la terza è una somma di quadrati (e quindi sempre positiva).

2. Risolvi le seguenti equazioni:

A. $\sqrt{x-4}+x-1=0$

Per la condizione di esistenza, $x\geq 4$, visto che $x-4$, argomento di una radice di indice pari, deve essere sempre positivo. Da questo deduciamo che se $x\geq 4$ allora $x-1>0$ sempre e quindi a primo membro ho la somma di due quantità sempre positive, che non daranno mai, per nessun valore reale, un risultato nullo. Quindi: $\boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$.

B. $\sqrt{x^2-4x+4}=x-2$

Individuiamo, nel radicando, un quadrato di binomio:

$$\sqrt{(x-2)^2}=x-2\qquad\qquad |x-2|=x-2$$

Quest'uguaglianza è verificata sempre, se il secondo membro non è negativo, perciò: $\boldsymbol{x\geq 2}$.

C. $\sqrt{x-3}+x-3=0$

Il radicando deve essere positivo, perciò: $x\geq 3$. Ne deduciamo che a primo membro abbiamo la somma di due quantità positive, che quindi non possono che dare un risultato nullo solo nel caso in cui siano entrambe nulle, ovvero per $\boldsymbol{x=3}$.

D. $\sqrt{x-\sqrt{5}}=\frac{7-x^2}{\sqrt{x+\sqrt{5}}}$

Procediamo con il minimo comune multiplo:

$$\sqrt{x^2-5}=7-x^2$$

Eleviamo a quadrato entrambi i membri e risolviamo la biquadratica che otteniamo:

$$x^2-5=49-14\,x^2+x^4\qquad x^4-15\,x^2+54=0\qquad (x^2-6)(x^2-9)=0$$

Otteniamo facilmente le soluzioni e procediamo con il verificarne l'accettabilità, sostituendole nel testo:

$x_1=\sqrt{6}$ $\quad\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{7-6}{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}}\qquad 1=1\qquad acc.$

$x_2=-\sqrt{6}$ $\quad\sqrt{-\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{7-6}{\sqrt{-\sqrt{6}+\sqrt{5}}}$ non accettabile, in quanto l'argomento della prima radice è negativo

$x_3=3$ $\quad\sqrt{3-\sqrt{5}}=\frac{7-9}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}$ non accettabile, in quanto il secondo membro è negativo, mentre il primo è positivo

$x_4=-3$ $\quad\sqrt{-3-\sqrt{5}}=\frac{7-9}{\sqrt{-3+\sqrt{5}}}$ non accettabile, in quanto l'argomento della prima radice è negativo

L'unica soluzione accettabile è quindi: $\boldsymbol{x=\sqrt{6}}$.

3. Risolvi le seguenti disequazioni:

A. $\frac{2x+3}{3-\sqrt{x^2-1}} \le 0$

Procediamo studiando il segno del numeratore e del denominatore, ponendoli positivi:

$N \ge 0$: $x \ge -\frac{3}{2}$

$D > 0$: $3-\sqrt{x^2-1} > 0 \qquad \sqrt{x^2-1} < 3$

Per risolvere il denominatore, elevo a quadrato entrambi i membri e pongo le condizioni di esistenza sul radicando, mettendo a sistema le due disequazioni ottenute:

$$\begin{cases} x^2-1<9 \\ x^2-1 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2<10 \\ x^2 \ge 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\sqrt{10}<x<\sqrt{10} \\ x \le -1 \ \vee \ x \ge 1 \end{cases} \qquad -\sqrt{10}<x\le -1 \ \vee \ 1 \le x < \sqrt{10}$$

Nel determinare il segno della frazione, ovvero facendo lo studio dei segni, non devo dimenticare che il risultato $x \le -1 \ \vee \ x \ge 1$ è una condizione di esistenza:

	$-\sqrt{10}$		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$\sqrt{10}$	
$-$		$-$		$+$				$+$		$+$
$-$		$+$		$+$				$+$		$-$
$+$		$-$		$+$				$+$		$-$

$$\boldsymbol{-\sqrt{10} < x \le -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x > \sqrt{10}}$$

B. $\sqrt{|9-x^2|} < x+3$

$$\begin{cases} x+3>0 \\ |9-x^2| < x^2+6x+9 \end{cases}$$

Dobbiamo togliere il valore assoluto e ne nascono quindi due diversi sistemi, uno quando l'argomento è positivo e l'altro quando è negativo:

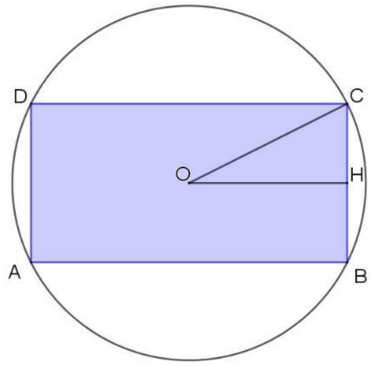
$$\begin{cases} 9-x^2 \ge 0 \\ 9-x^2 < x^2+6x+9 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ 2x^2+6x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ x<-3 \ \vee \ x>0 \end{cases} \qquad 0 < x \le 3$$

$$\begin{cases} 9-x^2 < 0 \\ -9+x^2 < x^2+6x+9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-3 \ \vee \ x>3 \\ 6x>-18 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-3 \ \vee \ x>3 \\ x>-3 \end{cases} \qquad x>3$$

Unendo le due soluzioni otteniamo: $x > 0$.
La soluzione della seconda disequazione era a sistema con la condizione di positività del secondo membro, quindi:

$$\begin{cases} x>-3 \\ x>0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x>0}$$

4. Un rettangolo di area $\frac{48}{25}r^2$ è inscritto in una circonferenza di raggio r. Determinane il perimetro, motivando e spiegando il procedimento seguito.



Traccio la perpendicolare al lato BC passante per O: una retta passante per il centro della circonferenza e perpendicolare a una corda, la divide a metà, perciò $\overline{CH} = \overline{HB}$ e indichiamo entrambi i segmenti con x. Il segmento OC, dato che il rettangolo è inscritto nella circonferenza, ha la misura del raggio, perciò possiamo determinare la misura di $\overline{OH}$ con il teorema di Pitagora:

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$\overline{AB} = 2\,\overline{OH}$ e possiamo quindi determinare l'area:

$$A = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2x \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

Avendo il valore dell'area, possiamo quindi determinare l'equazione:

$$4x\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{48}{25}r^2 \qquad x\,\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{12}{25}\,r^2$$

Elevo a quadrato entrambi i membri:

$$x^2r^2 - x^4 = \frac{12^2}{25^2}r^4 \qquad x^4 - r^2x^2 + \frac{12^2}{25^2}r^4 = 0$$

$$(x^2)_{1,2} = \frac{r^2 \pm \sqrt{r^4 - \frac{24^2}{25^2}r^4}}{2} = \frac{r^2 \pm \frac{7}{25}r^2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{16}{25}r^2 \\ \frac{9}{25}r^2 \end{array} \right.$$

Otteniamo due soluzioni che rappresentano lo stesso rettangolo, semplicemente ruotato di 90°:

$$\overline{AB} = \frac{6}{5}r \qquad \overline{BC} = \frac{8}{5}r \qquad \boldsymbol{2p = \frac{28}{5}r}$$

$$\overline{AB} = \frac{8}{5}r \qquad \overline{BC} = \frac{6}{5}r \qquad \boldsymbol{2p = \frac{28}{5}r}$$