1. Determina il dominio della seguente funzione:

$$f(x)=\sqrt[3]{5x^2-2x-3}+\frac{1}{x^2+8x+16}-\frac{\sqrt{5-x}}{x^2+2x+4}$$

Ricordando che l'argomento di un radicale di indice pari deve essere non negativo e che il denominatore di una frazione deve essere diverso da zero, otteniamo:

$$\begin{cases}x^2+8x+16\neq 0\\5-x\geq 0\\x^2+2x+4\neq 0\end{cases}\qquad\begin{cases}(x+4)^2\neq 0\\x\leq 5\\\forall\, x\in\mathbb{R}\end{cases}\qquad\begin{cases}x\neq -4\\x\leq 5\end{cases}\qquad \boldsymbol{D=\,]-\infty;\,-4[\,\cup\,]-4;\,5]}$$

Ricordando che la terza disequazione è un falso quadrato (quindi non solo diverso da zero per qualsiasi valore reale di x, ma anche maggiore di zero) e la prima è un quadrato (quindi sempre positivo, ma diverso da zero nel momento in cui la base è non nulla).

2. Risolvi le seguenti equazioni:

A. $\sqrt{x^2-1}=x^2+4$

Elevando al quadrato entrambi i membri, otteniamo: $x^2-1=x^4+8x^2+16$ che diventa $x^4+7x^2+17=0$, ovvero una somma di quantità necessariamente positive. Quindi: $\boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$.

B. $\sqrt{1-x}=x-2$

Il radicando deve essere positivo, perciò: $x\leq 1$. Ne deduciamo che il secondo membro è sempre negativo e quindi non può essere uguale al radicale al primo membro che è positivo nel suo dominio, perciò $\boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$.

C. $\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1}=x-1$

$$\sqrt[3]{(x-1)^3}=x-1\qquad x-1=x-1\qquad \boldsymbol{\forall x\in\mathbb{R}}$$

D. $\frac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}+1}=1$

Procediamo con il minimo comune multiplo:

$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+1}=2\sqrt{x+1}+1\qquad \sqrt{3x+4}=\sqrt{x+1}+1$$

Eleviamo a quadrato entrambi i membri e poi avremo bisogno di isolare ancora il radicale a secondo membro e elevare di nuovo al quadrato:

$$3x+4=x+1+1+2\sqrt{x+1}\qquad 2x+2=2\sqrt{x+1}\qquad x+1=\sqrt{x+1}$$

$$x^2+2x+1=x+1\qquad x^2+x=0\qquad x(x+1)=0\qquad x_1=0\quad x_2=-1$$

Procediamo con il verificare l'accettabilità delle soluzioni, sostituendole nel testo:

$$x_1=0\qquad \frac{2+1}{2+1}=1\qquad 1=1\qquad acc.\qquad\qquad x_2=-1\qquad \frac{1+0}{0+1}=1\qquad 1=1\qquad acc.$$

Entrambe le soluzioni accettabili, perciò: $\boldsymbol{x_1=0}$ e $\boldsymbol{x_1=-1}$.

3. Risolvi le seguenti disequazioni:

A. $\sqrt{|x^2-4|}<2-x$

$$\begin{cases}2-x>0\\|x^2-4|<4-4x+x^2\end{cases}$$

Dobbiamo togliere il valore assoluto e ne nascono quindi due diversi sistemi, uno quando l'argomento è positivo e l'altro quando è negativo:

$$\begin{cases}x^2-4\geq 0\\x^2-4<4-4x+x^2\end{cases}\qquad\begin{cases}x\leq -2\ \vee\ x\geq 2\\4x-8<0\end{cases}\qquad\begin{cases}x\leq -2\ \vee\ x\geq 2\\x<2\end{cases}\qquad x\leq -2$$

$$\begin{cases}x^2-4<0\\-x^2+4<4-4x+x^2\end{cases}\qquad\begin{cases}-2<x<2\\2x^2-4x>0\end{cases}\qquad\begin{cases}-2<x<2\\x<0\ \vee\ x>2\end{cases}\qquad -2<x<0$$

Unendo le due soluzioni otteniamo: $x<0$.

La soluzione della seconda disequazione era a sistema con la condizione di positività del secondo membro, quindi: $\begin{cases}x<2\\x<0\end{cases}$ $\qquad\boldsymbol{x<0}$

B. $\frac{3-x}{\sqrt{2}-\sqrt{x^2-2}} \leq 0$

Procediamo studiando il segno del numeratore e del denominatore, ponendoli positivi:

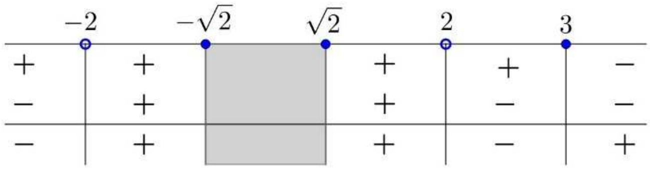
$N \geq 0: \quad x \leq 3$

$D > 0: \quad \sqrt{2}-\sqrt{x^2-2} > 0 \qquad\qquad \sqrt{x^2-2} < \sqrt{2}$

Per risolvere il denominatore, elevo a quadrato entrambi i membri e pongo le condizioni di esistenza sul radicando, mettendo a sistema le due disequazioni ottenute:

$$\begin{cases} x^2-2<2 \\ x^2-2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2<4 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2<x<2 \\ x \leq -\sqrt{2} \ \vee \ x \geq \sqrt{2} \end{cases} \qquad -2<x \leq -\sqrt{2} \ \vee \ \sqrt{2} \leq x < 2$$

Nel determinare il segno della frazione, ovvero facendo lo studio dei segni, non devo dimenticare che il risultato $x \leq -\sqrt{2} \ \vee \ x \geq \sqrt{2}$ è una condizione di esistenza:

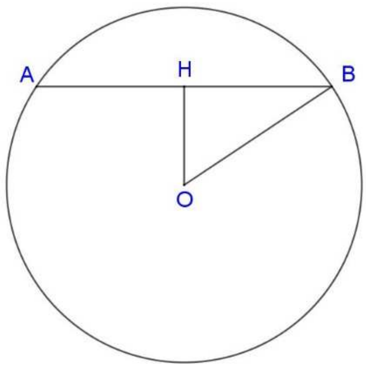


$$\boldsymbol{x < -2 \quad \vee \quad 2 < x \leq 3}$$

4. In una circonferenza di raggio r, sommando una corda alla sua distanza dal centro ottieni $\frac{11}{5}r$. Determina l'area del triangolo che ha per base la corda e per altezza la sua distanza dal centro, motivando e spiegando il procedimento seguito.

Traccio la perpendicolare alla corda AB passante per O: una retta passante per il centro della circonferenza e perpendicolare a una corda, la divide a metà, perciò $\overline{AH} = \overline{HB}$ e determiniamone la misura con il teorema di Pitagora, ponendo $\overline{OH} = x$:

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{r^2-x^2}$$



Possiamo a questo punto determinare l'equazione:

$$\overline{AB} + \overline{OH} = 2\sqrt{r^2-x^2} + x$$

Sapendo che la somma della corda con la sua distanza dal centro è $\frac{11}{5}r$:

$$2\sqrt{r^2-x^2} + x = \frac{11}{5}r \qquad\qquad 2\sqrt{r^2-x^2} = \frac{11}{5}r - x$$

Elevo a quadrato entrambi i membri:

$$4r^2 - 4x^2 = \frac{121}{25}r^2 + x^2 - \frac{22}{5}rx \qquad\qquad 5x^2 - \frac{22}{5}rx + \frac{21}{25}r^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{11}{5}r \pm \sqrt{\frac{121}{25}r^2 - \frac{21}{5}r^2}}{5} = \frac{\frac{11}{5}r \pm \frac{4}{5}r}{5} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{3}{5}r \\ \frac{7}{25}r \end{array} \right.$$

Otteniamo due soluzioni:

$$\overline{OH} = \frac{3}{5}r \qquad \overline{AB} = \frac{8}{5}r \qquad \boldsymbol{A = \frac{12}{25}r^2}$$

$$\overline{OH} = \frac{7}{25}r \qquad \overline{AB} = \frac{48}{25}r \qquad \boldsymbol{A = \frac{168}{625}r^2}$$