1. Sapendo che $\int_0^9 f(x)\,dx = 12$, calcola $\int_0^3 f(3x)\,dx$.

$$\int_0^3 f(3x)\,dx = \qquad t = 3x \quad x = \frac{t}{3} \qquad dx = \frac{1}{3}dt \qquad = \int_0^9 \frac{1}{3}\,f(t)\,dt = \frac{1}{3}\cdot 12 = \mathbf{4}$$

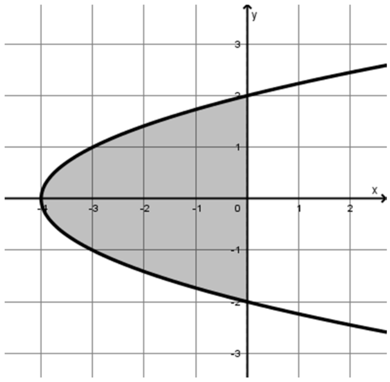
Sapendo che $\int_2^4 f(x)\,dx = -3$, calcola $\int_2^1 f(2x)\,dx$.

$$\int_2^1 f(2x)\,dx = \qquad t = 2x \quad x = \frac{t}{2} \qquad dx = \frac{1}{2}dt \qquad = \int_4^2 \frac{1}{2}\,f(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cdot(-3) = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

2. Determina la misura dell'area della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $x = y^2 - 4$ e dall'asse y.

La parabola ha asse di simmetria coincidente con l'asse x e vertice in $V(-4;0)$. L'area è quella evidenziata nella figura a lato. Consideriamo i punti di intersezione della parabola con l'asse y, $(0;\ \pm 2)$:

$$\int_{-2}^{2} (-y^2+4)\,dy = \left[-\frac{1}{3}y^3 + 4y\right]_{-2}^{2} = \mathbf{\frac{32}{3}}$$



3. Calcola la misura della parte di piano limitata dalle curve $xy = 2$ e $y = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{26}{9}x$.

La parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice in $V\left(\frac{13}{8};\frac{169}{72}\right)$. L'area è quella finita evidenziata nella figura a lato, mentre l'altra è delimitata dalle due curve, ma anche dall'asse y. Determino l'ascissa dei punti di intersezione tra le due curve:

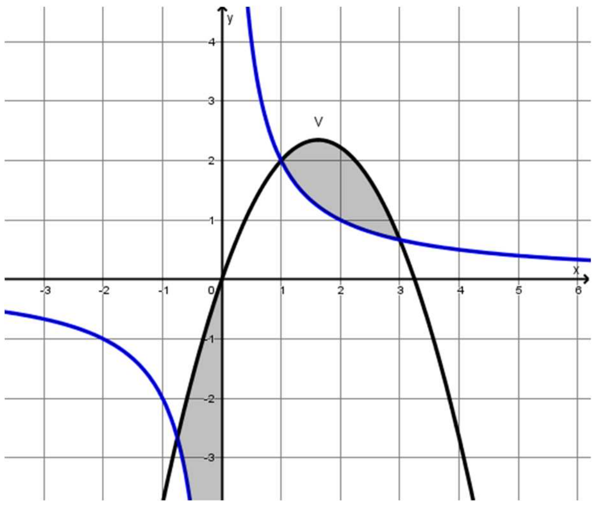
$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = -\dfrac{8}{9}x^2 + \dfrac{26}{9}x \end{cases} \qquad \frac{2}{x} = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{26}{9}x$$

$$4x^3 - 13\,x^2 + 9 = 0$$

Applicando la regola di Ruffini con $x = 1$:

$$(x-1)(4x^2 - 9x - 9) = 0$$

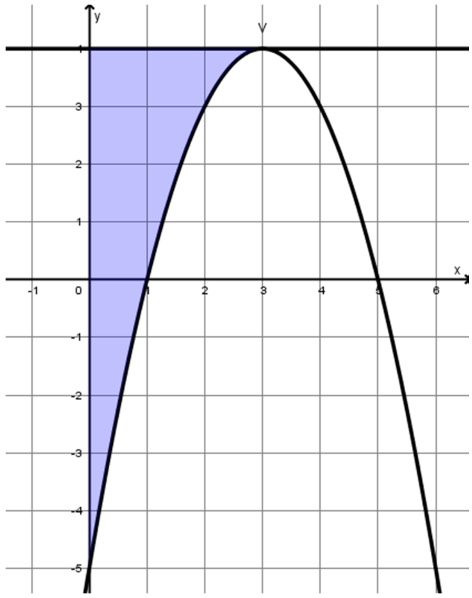
$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+144}}{8} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$



Possiamo ora calcolare l'area:

$$\int_1^3 \left(-\frac{8}{9}x^2 + \frac{26}{9}x - \frac{2}{x}\right)dx = \left[-\frac{8}{27}x^3 + \frac{13}{9}x^2 - 2\ln|x|\right]_1^3 = \mathbf{\frac{104}{27} - 2\,\ln 3}$$

4. Data la parabola di vertice $(3; 4)$, con asse parallelo all'asse y e passante per il punto $(1;\ 0)$, trova la misura dell'area della parte di piano limitata dall'asse y, dalla curva e dalla tangente nel vertice.



La parabola con asse parallelo all'asse y ha generica equazione: $y = ax^2 + bx + c$ e vertice di ascissa $-\frac{b}{2a}$. Ponendo l'ascissa generica del vertice uguale a quella data, imponendo il passaggio per il vertice e per il punto dato, ottengo il sistema:

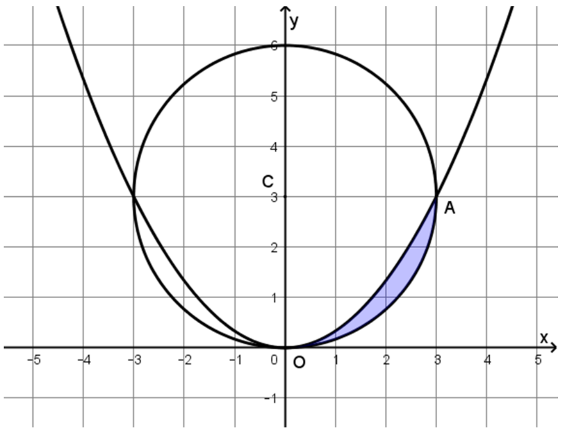
$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 3 \\ 4 = 9a + 3b + c \\ 0 = a + b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -6a \\ c = 4 + 9a \\ a - 6a + 4 + 9a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -5 \end{cases}$$

L'equazione della parabola è: $y = -x^2 + 6x - 5$ e la tangente alla parabola nel vertice ha equazione $y = 4$. Per ottenere la misura dell'area evidenziata nel grafico risolvo l'integrale:

$$\int_0^3 (4 + x^2 - 6x + 5)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right]_0^3 = \mathbf{9}$$

5. Data la parabola di equazione $y = \frac{1}{3}x^2$ e la circonferenza di equazione $x^2 + (y - a)^2 = 9$, con $a > 0$, determina a in modo che le due curve risultino tangenti nell'origine O degli assi. Detto A il punto di intersezione di ascissa positiva tra la parabola e la circonferenza, determina la misura dell'area della parte di piano delimitata dagli archi OA delle due curve.

Siccome la parabola ha il vertice nell'origine, la sua tangente alla parabola è l'asse x e, siccome le due curve sono tangenti, anche la circonferenza sarà tangente nell'origine all'asse x, ovvero ha l'ordinata del centro uguale al raggio ed essendo $a > 0$, $a = 3$.
Determino l'ascissa del punto di intersezione nel primo quadrante tra la parabola e la circonferenza:



$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x^2 \\ x^2 + (y - 3)^2 = 9 \end{cases} \qquad x^2 + \left(\frac{1}{3}x^2 - 3\right)^2 = 9 \qquad x^4 - 9x^2 = 0$$

$$x^2\,(x^2 - 9) = 0 \qquad x^2(x - 3)(x + 3) = 0$$

L'ascissa del punto A di intersezione è $x = 3$.

Per calcolare l'area, calcolo l'area di un quarto di circonferenza e poi sottraggo l'area del segmento di parabola OAC:

$$\frac{1}{4}\pi \cdot 3^2 - \int_0^3 \left(3 - \frac{1}{3}x^2\right) dx = \frac{9}{4}\pi - \left[3x - \frac{1}{9}x^3\right]_0^3 = \boldsymbol{\frac{9}{4}\pi - 6}$$

Oppure esprimo prima l'equazione della circonferenza in funzione di x:

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9 \qquad (y - 3)^2 = 9 - x^2 \qquad y - 3 = -\sqrt{9 - x^2} \qquad y = 3 - \sqrt{9 - x^2}$$

L'integrale dal calcolare per determinare l'area è: $\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 - 3 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$

Calcolo a parte: $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$ facendo la sostituzione: $x = 3\sin t \qquad dx = 3\cos t\ dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - 9\sin^2 t}\ 3\cos t\ dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\ dt = \frac{9}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4}\pi$$

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 - 3 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - 3x\right]_0^3 + \frac{9}{4}\pi = \boldsymbol{\frac{9}{4}\pi - 6}$$

6. Determina k in modo che l'area della regione finita di piano delimitata dall'asse x e dalla parabola di equazione $y = -x^2 + kx$ misuri 36.

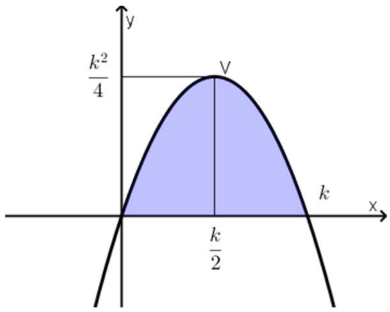
Caso $k > 0$:

La parabola ha vertice di coordinate $V\left(\frac{k}{2}; \frac{k^2}{4}\right)$ e interseca l'asse x nell'origine e in $(k; 0)$:

$$\int_0^k (-x^2 + kx)\, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2\right]_0^k = -\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^3 = \frac{1}{6}k^3$$

Pongo l'area così determinata in funzione del parametro uguale a quella data dal testo:

$$\frac{1}{6}k^3 = 36 \qquad k^3 = 216 \qquad k = \mathbf{6}$$



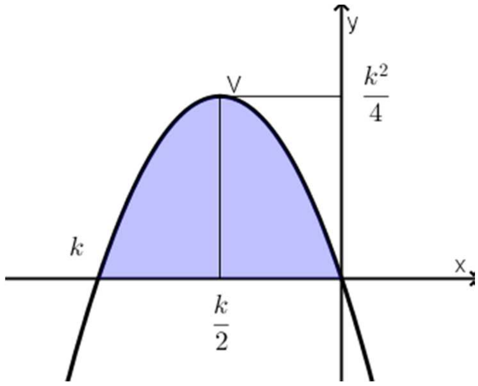
Caso $k < 0$:

La parabola ha vertice di coordinate $V\left(\frac{k}{2}; \frac{k^2}{4}\right)$ e interseca l'asse x nell'origine e in $(k; 0)$:

$$\int_k^0 (-x^2 + kx)\, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2\right]_k^0 = +\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^3 = -\frac{1}{6}k^3$$

Pongo l'area così determinata in funzione del parametro uguale a quella data dal testo:

$$-\frac{1}{6}k^3 = 36 \qquad k^3 = -216 \qquad k = \mathbf{-6}$$



7. L'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ruota attorno all'asse x. Determina il volume del solido da essa generato.

L'equazione dell'ellisse in funzione di x è data da:

$$\frac{y^2}{4} = \frac{9 - x^2}{9} \qquad y^2 = \frac{4}{9}(9 - x^2) \qquad y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

Considero l'arco di ellisse al di sopra dell'asse x e considero la rotazione dell'ellisse attorno all'asse x:

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\right)^2 dx = \frac{4}{9} \cdot 2\pi \int_0^3 (9 - x^2)\, dx = \frac{8}{9}\pi \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \mathbf{16\pi}$$

8. Un tronco di cono di altezza h e basi di raggi r e R può essere pensato come generato dalla rotazione completa, attorno all'asse x, di un trapezio rettangolo il cui lato perpendicolare alle basi ha un estremo nell'origine e l'altro nel punto $(h;\ 0)$. Scrivi l'equazione della retta del lato obliquo e quindi, calcolando un opportuno integrale, determina il volume del tronco di cono.

L'equazione della retta del lato obliquo è:

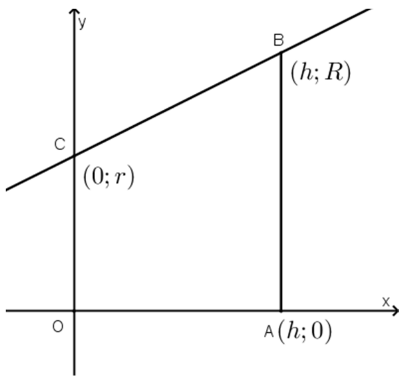
$$\frac{y - r}{R - r} = \frac{x}{h} \qquad y = \frac{R - r}{h}x + r$$

Per determinare il volume del tronco di cono:

$$\pi \int_0^h \left(\frac{R - r}{h}x + r\right)^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{(R - r)^2}{h^2}x^2 + \frac{2rx\,(R - r)}{h} + r^2\right) dx =$$

$$= \pi \left[\frac{(R - r)^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{r\,(R - r)}{h}x^2 + r^2 x\right]_0^h = \pi \left(\frac{1}{3}h(R - r)^2 + r(R - r)\,h + r^2 h\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 - 2Rr + r^2 + 3rR - 3r^2 + 3r^2) = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + Rr + r^2)$$



9. Scegli **uno** dei seguenti problemi:

A. Un punto materiale P si muove di moto rettilineo partendo dal punto O con velocità iniziale $v_o = 12\ m/s$ e accelerazione istantanea che varia nel tempo secondo la relazione $a = -6t$ in unità SI. Trova la legge oraria e stabilisci a quale distanza massima da O viene a trovarsi il punto P nella prima fase di allontanamento da O. Verifica inoltre che in tale posizione l'energia cinetica è minima.

Per determinare la legge della velocità in funzione del tempo, calcolo l'integrale dell'accelerazione:

$$\begin{cases} v(0) = 12 \\ v(t) = \int (-6t)\, dt \end{cases} \qquad \begin{cases} v(0) = 12 \\ v(t) = -3t^2 + c \end{cases} \qquad v(0) = 0 + c = 12 \qquad v(t) = -3t^2 + 12$$

Per determinare la legge della posizione in funzione del tempo, calcolo l'integrale della velocità:

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(t) = \int (-3t^2 + 12)\, dt \end{cases} \qquad \begin{cases} s(0) = 0 \\ s(t) = -t^3 + 12t + c \end{cases} \qquad s(0) = 0 + c = 0 \qquad \boldsymbol{s(t) = -t^3 + 12t}$$

Nella cubica, il punto a distanza massima da O nella prima fase di allontanamento da O è dato dal punto di minimo/massimo. Determino quindi l'ascissa dei due punti stazionari:

$$s' = -3t^2 + 12 > 0 \qquad -2 < t < 2 \qquad massimo\ in\ (2; 16)$$

La distanza massima da O è a $\boldsymbol{16\ m}$ e in tale punto, essendo un massimo, la velocità è nulla e quindi anche l'energia cinetica è nulla, $\boldsymbol{K = 0}$.

B. Calcola la quantità di carica elettrica che attraversa la sezione di un circuito nei primi 3 s dalla sua chiusura, sapendo che l'intensità della corrente cresce secondo la legge $i = kt^2$ in unità SI, e che il valore di i dopo il primo secondo è $0{,}6\ A$.

Per determinare il valore del parametro, pongo la corrente nel primo secondo uguale a 0,6 A, perciò:

$$i(1) = k = 0{,}6$$

Essendo la corrente il rapporto tra la carica che passa attraverso una sezione in un certo intervallo di tempo:

$$Q = \int_0^3 0{,}6\, t^2\, dt = [0{,}2\, t^3]_0^3 = \boldsymbol{5{,}4\ C}$$