1. Determina il dominio della seguente funzione:

$$f(x)=\sqrt{|x|-3}+\frac{1}{x^2-16}$$

Ricordando che l'argomento di un radicale di indice pari deve essere non negativo e che il denominatore di una frazione deve essere diverso da zero, otteniamo:

$$\begin{cases}|x|-3\geq 0\\ x^2-16\neq 0\end{cases} \qquad \begin{cases}x\leq -3 \ \vee \ x\geq 3\\ x\neq \pm 4\end{cases} \qquad \boldsymbol{D=(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ -3]\cup[3;4)\cup(4;\ +\infty)}$$

2. Risolvi le seguenti equazioni:

A. $-\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[3]{x^2+4}$

Il primo membro è sicuramente negativo all'interno del dominio, mentre il secondo membro è sicuramente positivo, infatti il radicando, in quanto somma di quadrati, è sicuramente positivo. Quindi: $\boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$.

B. $\sqrt{x}+x+7=0$

Il dominio è $x\geq 0$, quindi la radice è positiva e anche $x+7$ è positivo. In quanto somma di quantità positive non può essere nulla, quindi $\boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$.

C. $\sqrt{-x^2+2x-1}+x-1=0$

Siccome $\sqrt{-(x-1)^2}+x-1=0$ ha dominio $x=1$, possiamo verificare che $\boldsymbol{x=1}$ è l'unica soluzione possibile.

D. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=2$

Procediamo con il minimo comune multiplo:

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}$$

Lavorando un po' sui singoli termini otteniamo: $3\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}$

Eleviamo a quadrato entrambi i membri e risolviamo l'equazione di primo grado che otteniamo:

$$9-9x=1+x \qquad 10\,x=8 \qquad x=\frac{4}{5}$$

Verifichiamone l'accettabilità, sostituendola nel testo:

$\frac{\sqrt{1+\frac{4}{5}}+\sqrt{1-\frac{4}{5}}}{\sqrt{1+\frac{4}{5}}-\sqrt{1-\frac{4}{5}}}=2 \qquad \frac{3+1}{3-1}=2 \qquad 2=2$ accettabile, perciò la soluzione è $\boldsymbol{x=\frac{4}{5}}$.

3. Risolvi le seguenti disequazioni:

A. $\sqrt{x^2-4x+3}\leq 1-x$

Possiamo studiare solamente il caso in cui il secondo membro è positivo:

$$\begin{cases}1-x\geq 0\\ x^2-4x+3\geq 0\\ x^2-4x+3\leq 1-2x+x^2\end{cases} \qquad \begin{cases}x\leq 1\\ x\leq 1 \ \vee \ x\geq 3\\ x\geq 1\end{cases} \qquad \boldsymbol{x=1}$$

B. $\frac{3x-1}{\sqrt{1-9x^2}} < 0$

Il segno dipende dal numeratore, visto che il denominatore è sempre positivo nel dominio, perciò la disequazione ha soluzione $x < \frac{1}{3}$ e dobbiamo mettere a sistema la soluzione con il dominio:

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 1-9x^2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \boldsymbol{-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}}$$

C. $\sqrt{|1-x|} > \sqrt{2}$

Eleviamo a quadrato entrambi i membri, visto che il radicando è sicuramente positivo:

$$|1-x| > 2$$

Risolviamo a questo punto la disequazione in valore assoluto:

$$1-x < -2 \quad \vee \quad 1-x > 2$$

$$\boldsymbol{x < -1 \quad \vee \quad x > 3}$$

4. Data l'equazione:

$$(b+2)\,x^2 - 2bx - b + 2 = 0$$

con $b > -2$, determina per quali valori del parametro b il valore assoluto della differenza delle sue radici è minore di 1.

Per cominciare, determiniamo le radici dell'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = b^2 - (b+2)(-b+2) = b^2 + b^2 - 4 = 2b^2 - 4 \qquad x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{2b^2-4}}{b+2}$$

Perciò poniamo il valore assoluto della differenza delle radici minore di 1 a sistema con il discriminante maggiore o uguale a zero:

$$\begin{cases} \left|\frac{b+\sqrt{2b^2-4}}{b+2} - \frac{b-\sqrt{2b^2-4}}{b+2}\right| < 1 \\ 2b^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2\sqrt{2b^2-4}}{b+2} < 1 \\ b^2 - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Nella prima disequazione, ho potuto togliere il valore assoluto, in quanto il numeratore della frazione è sicuramente positivo, essendo un radicale di indice pari, e il denominatore è positivo per quanto detto nel testo, visto che $b > -2$. Procediamo con la prima disequazione facendo il minimo comune multiplo ed elevando entrambi i membri al quadrato:

$$8b^2 - 16 < b^2 + 4b + 4 \qquad 7b^2 - 4b - 20 < 0 \qquad b_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{7} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -\frac{10}{7} \end{array} \right. \qquad -\frac{10}{7} < b < 2$$

La seconda disequazione è più rapida, perciò possiamo procedere con il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{10}{7} < b < 2 \\ b \leq -\sqrt{2} \quad \vee \quad b \geq \sqrt{2} \end{cases} \qquad \boldsymbol{-\frac{10}{7} < b \leq -\sqrt{2} \quad \vee \quad \sqrt{2} \leq b < 2}$$