1. $\sqrt{x-2}+x-2=-4$

$C.E.: x \geq 2$, perciò $\sqrt{x-2}+(x-2) \geq 0$ e non può essere uguale a un numero negativo. Di conseguenza, $\nexists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

2. $\sqrt{x^2-3x+4}=\sqrt{2x+x^2-31}$

Elevando a quadrato entrambi i membri:

$x^2-3x+4=2x+x^2-31$ $\quad$ $5x=35$ $\quad$ $\boldsymbol{x=7}\ acc.$

3. $x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{10}{\sqrt{x^2+16}}$

$x^2=\left(-\sqrt{x^2+16}+\dfrac{10}{\sqrt{x^2+16}}\right)^2$ $\quad$ $x^2=x^2+16+\dfrac{100}{x^2+16}-20$ $\quad$ $\dfrac{100}{x^2+16}=4$

$25=x^2+16$ $\quad$ $x^2=9$ $\quad$ $\boldsymbol{x=-3}$

$x=3$ non è accettabile, perché, sostituita nel testo, non verifica l'equazione

4. $\sqrt{x-2}+2=\sqrt{8-x}$

Pongo le condizioni di esistenza: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 8 \end{cases}$ $\quad$ $2 \leq x \leq 8$

Elevando entrambi i membri al quadrato:

$x-2+4+4\sqrt{x-2}=8-x$ $\quad$ $4\sqrt{x-2}=6-2x$ $\quad$ $2\sqrt{x-2}=3-x$

Interseco le condizioni di esistenza con la condizione di concordanza del segno: $\begin{cases} 2 \leq x \leq 8 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2 \leq x \leq 8 \\ x \leq 3 \end{cases}$ $\quad$ $2 \leq x \leq 3$

Risolvo l'equazione elevando entrambi i membri al quadrato:

$4x-8=9-6x+x^2$ $\quad$ $x^2-10x+17=0$ $\quad$ $x_{1,2}=5 \pm 2\sqrt{2}$

Secondo le condizioni poste, $x=5+2\sqrt{2}$ non è accettabile. L'unica soluzione accettabile è: $\boldsymbol{x=5-2\sqrt{2}}$.

5. $\sqrt[3]{x^3-2x}<x$

Elevando entrambi i membri al cubo:

$x^3-2x<x^3$ $\quad$ $-2x<0$ $\quad$ $\boldsymbol{x>0}$

6. $\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{3x-4}<0$

La somma di due radici di indice pari, essendo positive nell'ambito del dominio, non può essere negativa, perciò $\nexists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

7. $\sqrt{x-3}+4>0$

La somma di una radice di indice pari è sempre positiva nell'ambito del dominio, in questo caso per $x \geq 3$, e, sommata a un numero positivo, darà sempre un risultato positivo, perciò $\boldsymbol{x \geq 3}$.

8. $x < \sqrt{x^2-4} - 4$

$$\sqrt{x^2-4} > x+4$$

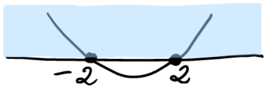
La soluzione della disequazione data è equivalente all'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^2-4 > x^2+8x+16 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x+4<0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases}$$

Risolvo il primo sistema:

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ 8x < -20 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -4 \\ x < -\dfrac{5}{2} \end{cases} \qquad -4 \leq x < -\frac{5}{2}$$

Risolvo la seconda disequazione del secondo sistema, facendone la soluzione grafica con la parabola, visto che l'equazione associata ha soluzioni $x_{1,2} = \pm 2$:



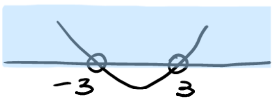
$$\begin{cases} x < -4 \\ x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad x < -4$$

Unendo le soluzioni dei due sistemi, si ottiene: $\boldsymbol{x < -\frac{5}{2}}$.

9. $|x^2-1| > 8$

$$x^2-1 < -8 \qquad \vee \qquad x^2-1 > 8$$
$$x^2 < -7 \qquad \vee \qquad x^2 > 9$$

Visto che la prima disequazione è impossibile, resta da risolvere $x^2 > 9$. La risolvo facendo la soluzione grafica con la parabola, visto che l'equazione associata ha soluzioni $x_{1,2} = \pm 3$:



$$\boldsymbol{x < -3 \qquad \vee \qquad x > 3}$$

10. $\dfrac{(x^2-1)(x-2)(x^2+5)}{(x^2-6x+9)(x-1)} \geq 0$

Scompongo i fattori della frazione:

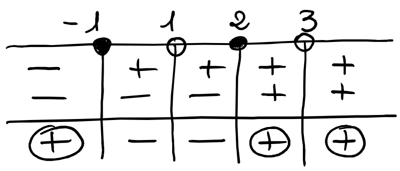
$$\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+5)}{(x-3)^2(x-1)} \geq 0$$

Posso semplificare i fattori $(x-1)$, ponendo la condizione $x \neq 1$.
Posso semplificare il fattore (x^2+5), perché, in quanto somma di quadrati, è sempre positivo.
Posso semplificare il fattore $(x-3)^2$, perché in quanto quadrato è sempre positivo, ma devo porre la condizione $x \neq 3$.
La disequazione da risolvere è:

$$(x+1)(x-2) \geq 0 \qquad con\ x \neq 3\ e\ x \neq 1$$

Pongo entrambi i fattori maggiori o uguali a zero e faccio lo studio dei segni:

$IF \geq 0: \ x \geq -1 \qquad IIF \geq 0: \ x \geq 2$



$$\boldsymbol{(x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 2) \quad \wedge \quad x \neq 3}$$

11. Aggiungendo 14 al doppio di un numero ed estraendo la radice quadrata dalla somma ottenuta, si ottiene la radice quadrata del numero stesso, aumentata di 3. Trova il numero.

Indicando con x l'incognita, il problema diventa:

$$\sqrt{14+2x}=\sqrt{x}+3$$

Elevando entrambi i membri a quadrato, ottengo:

$$14+2x=x+9+6\sqrt{x} \qquad x-6\sqrt{x}+5=0$$

Per procedere nella soluzione, pongo $\sqrt{x}=y$:

$$y^2-6y+5=0 \qquad y_{1,2}=3\pm\sqrt{9-5}=\left\langle\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right.$$

$$y_1=5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}=5 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_1=25}\ acc. \qquad y_2=1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}=1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_2=1}\ acc.$$

12. Un triangolo rettangolo ha i cateti di misura $3a$ e $4a$. Prolunga il cateto maggiore, dalla parte dell'angolo acuto, di un segmento x, in modo da ottenere un nuovo triangolo rettangolo. Trova la misura del prolungamento in modo che il nuovo triangolo abbia un perimetro doppio di quello dato.

Considerando la terna pitagorica $(3,4,5)$ per il triangolo rettangolo di partenza, l'ipotenusa ha lunghezza $5a$ e il suo perimetro ha lunghezza $12\ a$. Considero il secondo triangolo rettangolo, di cateti, rispettivamente, $3a$ e $4a+x$, e posso ottenere la lunghezza dell'ipotenusa, ricordando il teorema di Pitagora, secondo il quale la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa:

$$\sqrt{(3a)^2+(4a+x)^2}=\sqrt{9a^2+16a^2+8ax+x^2}=\sqrt{x^2+8ax+25a^2}$$

Applico quanto detto, ovvero pongo il perimetro del secondo triangolo uguale al doppio del primo:

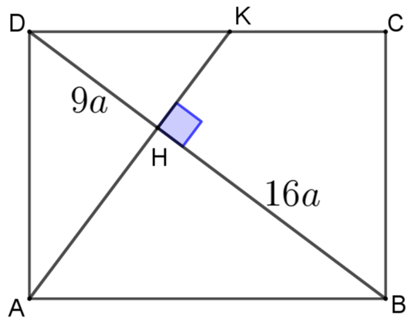
$$3a+4a+x+\sqrt{x^2+8ax+25a^2}=24\ a$$

Isolo la radice, procedo con l'elevamento a quadrato di entrambi i membri e risolvo il problema:

$$\sqrt{x^2+8ax+25a^2}=17a-x \qquad x^2+8ax+25a^2=289\ a^2-34ax+x^2$$

$$42ax=264a^2 \qquad \boldsymbol{x=\frac{44}{7}a}$$

13. Facendo riferimento alla figura 1, determina il perimetro del rettangolo ABCD.



Applico il **primo teorema di Euclide** al triangolo ABD per determinare le misure dei cateti, ricordando che in ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa, perciò:

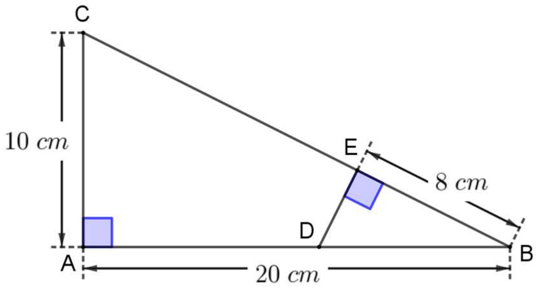
$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{BD}\cdot\overline{HD}}=\sqrt{25\ a\cdot 9\ a}=15\ a$$

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{BD}\cdot\overline{HB}}=\sqrt{25\ a\cdot 16\ a}=20\ a$$

Il perimetro del rettangolo è dato da:

$$2p=2(\overline{AB}+\overline{AD})=2(20\ a+15\ a)=\boldsymbol{70\ a}$$

14. Nella figura 2, ABC e DEB sono triangoli rettangoli. Qual è l'area del quadrilatero ADEC?



I triangoli ABC e EBD sono simili, in quanto sono entrambi rettangoli e hanno un angolo acuto in comune, $A\hat{B}C$. Perciò:

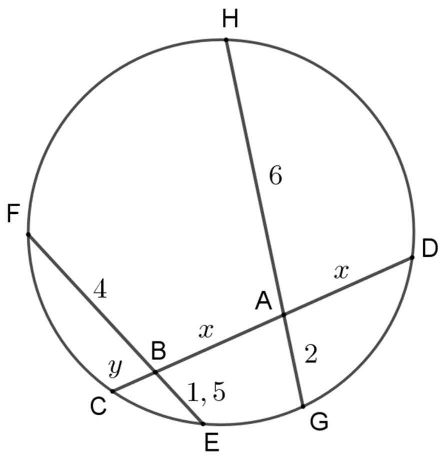
$$\mathcal{A}_{ABC} : \mathcal{A}_{EBD} = \overline{AB}^2 : \overline{EB}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_{EBD} = \mathcal{A}_{ABC}\left(\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{4}{25}\mathcal{A}_{ABC}$$

Posso, quindi, determinare l'area richiesta:

$$\mathcal{A}_{ADEC} = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{EBD} = \mathcal{A}_{ABC} - \frac{4}{25}\mathcal{A}_{ABC} =$$

$$= \frac{21}{25}\mathcal{A}_{ABC} = \frac{21}{25}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \mathbf{84\ cm^2}$$

15. Data la figura 3, determina x e y.



Applico il **teorema delle corde**, secondo il quale se in una circonferenza due corde si intersecano, i segmenti che si formano sulla prima corda e quelli che si formano sulla seconda sono, rispettivamente, gli estremi e i medi di una stessa proporzione.
Comincio, considerando le corde CD e FE che si intersecano in B, e poi le corde CD e HG che si intersecano in A:

$$\overline{BC} : \overline{BE} = \overline{FB} : \overline{BD} \qquad \overline{CA} : \overline{AG} = \overline{HA} : \overline{AD}$$

In una proporzione, il prodotto tra i medi è uguale al prodotto tra gli estremi, perciò ottengo le due equazioni che devono valere contemporaneamente:

$$\begin{cases} y\,(2x) = 1{,}5\cdot 4 \\ x\,(x+y) = 2\cdot 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + xy = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 3 \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, scartando il risultato negativo, ottengo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$$