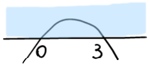
1. $\frac{|1-x^2|}{3x-x^2} \geq 0$

   Il numeratore è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ e nullo per $x = \pm 1$, perciò il segno è dato dal segno del denominatore.

   $x(3-x) > 0$ $\qquad$ $x_1 = 0, x_2 = 3$



   $\boldsymbol{0 < x < 3 \quad \vee \quad x = -1}$

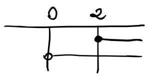
2. $\sqrt{x^2+2x+4} + x^2 > (x+2)(x-1)$

   $\sqrt{x^2+2x+4} + x^2 > x^2 - x + 2x - 2$ $\qquad$ $\sqrt{x^2+2x+4} > x - 2$

   $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2+2x+4 > (x-2)^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2+2x+4 \geq 0 \end{cases}$

   Risolvo il primo sistema:

   $\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2+2x+4 > x^2-4x+4 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 0 \end{cases}$



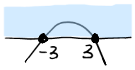
   $x \geq 2$

   Nel secondo sistema, la seconda disequazione è un falso quadrato, quindi sempre positivo. Resta solo la soluzione della prima disequazione, cioè: $x < 2$. Unendo le due soluzioni:

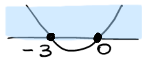
   $$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}}$$

3. $\sqrt{9-x^2} - x \leq 3$

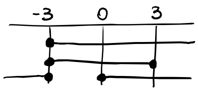
   $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 9-x^2 \geq 0 \\ 9-x^2 \leq (x+3)^2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ -3 \leq x \leq 3 \\ 9-x^2 \leq x^2+6x+9 \end{cases}$



   $2x^2+6x \geq 0$ $\qquad$ $2x(x+3) \geq 0$



   $\begin{cases} x \geq -3 \\ -3 \leq x \leq 3 \\ x \leq -3 \quad \vee \quad x \geq 0 \end{cases}$



   $\boldsymbol{x = -3 \quad \vee \quad 0 \leq x \leq 3}$

4. $1 + x^2 + \sqrt{x^4 - 3x^2 - 4} = 0$

   Somma di quantità sicuramente positive, quindi non potrà mai risultare zero. L'equazione non ha soluzioni: $\boldsymbol{\nexists x \in \mathbb{R}}$

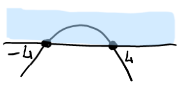
5. $|x^3 - 6x^2 + 12x - 8| \leq 0$

   $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$ $\qquad$ $(x-2)^3 = 0$ $\qquad$ $\boldsymbol{x = 2}$

6. $16 + x^2 > |16 - x^2|$

   Studio i due sistemi e poi unisco le soluzioni:

   $\begin{cases} 16-x^2 \geq 0 \\ 16-x^2 < 16+x^2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{matrix} 16-x^2 = 0 & x = \pm 4 & \\ -2x^2 < 0 & x^2 > 0 & x \neq 0 \end{matrix}$



   $\begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x \neq 0 \end{cases}$

   $\begin{cases} 16-x^2 < 0 \\ -16+x^2 < 16+x^2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x < -4 \quad \vee \quad x > 4 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\qquad$ $x < -4 \quad \vee \quad x > 4$

   Unendo le due soluzioni, ottengo: $\boldsymbol{x \neq 0}$

7. $|x^2 - x + 4| \leq 3$

   $\begin{cases} x^2-x+4 \leq 3 \\ x^2-x+4 \geq -3 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x^2-x+1 \leq 0 \\ x^2-x+7 \geq 0 \end{cases}$

   La prima disequazione del sistema rappresenta un falso quadrato, che è sempre positivo, perciò è impossibile. Di conseguenza: $\boldsymbol{\nexists x \in \mathbb{R}}$

8. $|x-3|^2+|2x-1|^2=25$

$x^2-6x+9+4x^2-4x+1=25 \qquad 5x^2-10x-15=0 \qquad x^2-2x-3=0 \qquad x_{1,2}=1\pm 2=\left\langle\begin{matrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{-1}\end{matrix}\right.$

9. $\frac{1}{|x-2|}<3$

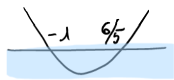
$|x-2|>\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad x-2<-\frac{1}{3} \quad\vee\quad x-2>\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x<\frac{5}{3}} \quad\vee\quad \boldsymbol{x>\frac{7}{3}}$

10. Determina per quali valori del parametro l'equazione $(k-3)\,x^2-4kx-k-2=0$ non ammette soluzioni reali.

Perché non ammetta soluzioni reali, il discriminante dell'equazione deve essere negativo:

$\frac{\Delta}{4}=4k^2+(k-3)(k+2)<0 \qquad 4k^2+k^2+2k-3k-6<0 \qquad 5k^2-k-6<0$

$k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+120}}{10}=\left\langle\begin{matrix}\frac{6}{5}\\ -1\end{matrix}\right.$



$\boldsymbol{-1<k<\frac{6}{5}}$

11. Date le equazioni, in x, $1-8kx-3k=0$ e $x+2k^2=0$, determina i valori di k affinché abbiano soluzioni tali che il loro prodotto sia minore di 1.

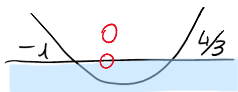
Le soluzioni delle equazioni sono:

$-8kx=3k-1 \qquad x=-\frac{3k-1}{8k} \quad con\ k\neq 0 \qquad x=-2k^2$

Pongo il loro prodotto minore di 1:

$-\frac{3k-1}{8k}\cdot(-2k^2)<1 \qquad \frac{3k^2-k}{4}-1<0 \qquad 3k^2-k-4<0$

$k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\left\langle\begin{matrix}\frac{4}{3}\\ -1\end{matrix}\right.$



$\boldsymbol{-1<k<\frac{4}{3} \quad\wedge\quad k\neq 0}$