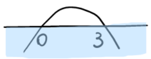
1. $\frac{|1-x^2|}{3x-x^2} \leq 0$

Il numeratore è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ e nullo per $x = \pm 1$, perciò il segno è dato dal segno del denominatore.

$x(3-x) < 0$ $\qquad$ $x_1 = 0, x_2 = 3$



$\boldsymbol{x < 0 \quad \vee \quad x > 3 \quad \vee \quad x = 1}$

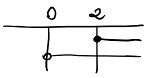
2. $\sqrt{x^2-2x+4} + x^2 > (x+2)(x-1)$

$\sqrt{x^2-2x+4} + x^2 > x^2 - x + 2x - 2$ $\qquad$ $\sqrt{x^2-2x+4} > x - 2$

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-2x+4 > (x-2)^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2-2x+4 \geq 0 \end{cases}$

Risolvo il primo sistema:

$\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-2x+4 > x^2-4x+4 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 0 \end{cases}$



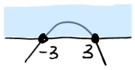
$x \geq 2$

Nel secondo sistema, la seconda disequazione è un falso quadrato, quindi sempre positivo. Resta solo la soluzione della prima disequazione, cioè: $x < 2$. Unendo le due soluzioni:

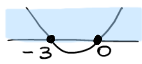
$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}}$

3. $\sqrt{9-x^2} - x \leq 3$

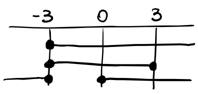
$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 9-x^2 \geq 0 \\ 9-x^2 \leq (x+3)^2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ -3 \leq x \leq 3 \\ 9-x^2 \leq x^2+6x+9 \end{cases}$



$2x^2+6x \geq 0$ $\qquad$ $2x(x+3) \geq 0$



$\begin{cases} x \geq -3 \\ -3 \leq x \leq 3 \\ x \leq -3 \quad \vee \quad x \geq 0 \end{cases}$



$\boldsymbol{x = -3 \quad \vee \quad 0 \leq x \leq 3}$

4. $2 + x^2 + \sqrt{x^4+3x^2-4} = 0$

Somma di quantità sicuramente positive, quindi non potrà mai risultare zero. L'equazione non ha soluzioni: $\boldsymbol{\nexists x \in \mathbb{R}}$

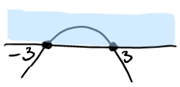
5. $|x^3+6x^2+12x+8| \leq 0$

$x^3+6x^2+12x+8 = 0$ $\qquad$ $(x+2)^3 = 0$ $\qquad$ $\boldsymbol{x = -2}$

6. $9 + x^2 > |9-x^2|$

Studio i due sistemi e poi unisco le soluzioni:

$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ 9-x^2 < 9+x^2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{matrix} 9-x^2 = 0 & x = \pm 3 & \\ -2x^2 < 0 & x^2 > 0 & x \neq 0 \end{matrix}$



$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 9-x^2 < 0 \\ -9+x^2 < 9+x^2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x < -3 \quad \vee \quad x > 3 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\qquad$ $x < -3 \quad \vee \quad x > 3$

Unendo le due soluzioni, ottengo: $\boldsymbol{x \neq 0}$

7. $|x^2-x+5| \leq 4$

$\begin{cases} x^2-x+5 \leq 4 \\ x^2-x+5 \geq -4 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x^2-x+1 \leq 0 \\ x^2-x+9 \geq 0 \end{cases}$

La prima disequazione del sistema rappresenta un falso quadrato, che è sempre positivo, perciò è impossibile. Di conseguenza: $\boldsymbol{\nexists x \in \mathbb{R}}$

8. $|x+3|^2+|2x+1|^2=25$

$x^2+6x+9+4x^2+4x+1=25$ $\quad 5x^2+10x-15=0$ $\quad x^2+2x-3=0$ $\quad x_{1,2}=-1\pm 2=\left\langle \begin{array}{l} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \end{array}\right.$

9. $\frac{1}{|x-3|}<2$

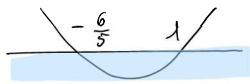
$|x-3|>\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x-3<-\frac{1}{2} \quad \vee \quad x-3>\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x<\frac{5}{2}} \quad \vee \quad \boldsymbol{x>\frac{7}{2}}$

10. Determina per quali valori del parametro l'equazione $(k-2)\,x^2-4kx-k-3=0$ non ammette soluzioni reali.

Perché non ammetta soluzioni reali, il discriminante dell'equazione deve essere negativo:

$\frac{\Delta}{4}=4k^2+(k-2)(k+3)<0$ $\quad 4k^2+k^2+3k-2k-6<0$ $\quad 5k^2+k-6<0$

$k_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{10}=\left\langle \begin{array}{l} -\frac{6}{5} \\ 1 \end{array}\right.$



$\boldsymbol{-\frac{6}{5}<k<1}$

11. Date le equazioni, in x, $1-8kx-3k=0$ e $x+2k^2=0$, determina i valori di k affinché abbiano soluzioni tali che il loro prodotto sia minore di 1.

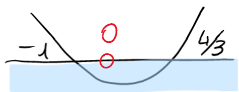
Le soluzioni delle equazioni sono:

$-8kx=3k-1 \qquad x=-\frac{3k-1}{8k} \quad con\ k\neq 0 \qquad x=-2k^2$

Pongo il loro prodotto minore di 1:

$-\frac{3k-1}{8k}\cdot(-2k^2)<1 \qquad \frac{3k^2-k}{4}-1<0 \qquad 3k^2-k-4<0$

$k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\left\langle \begin{array}{l} \frac{4}{3} \\ -1 \end{array}\right.$



$\boldsymbol{-1<k<\frac{4}{3}} \quad \wedge \quad \boldsymbol{k\neq 0}$