1. Dopo aver determinato per quali valori di k l'equazione $x^2+y^2-6x-4y+k+1=0$ rappresenta una circonferenza, stabilisci per quale valore di k la circonferenza:
   A. ha raggio 3;
   B. passa per il punto $A\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Perché si tratti di una circonferenza, i parametri della generica equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ devono soddisfare la condizione: $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\geq 0$, ovvero:

$$9+4-k-1\geq 0 \qquad \boldsymbol{k\leq 12}$$

A. Perché abbia raggio 3: $\sqrt{9+4-k-1}=3 \qquad 12-k=9 \qquad k=\mathbf{3}$

B. Perché passi per il punto A, sostituisco le coordinate del punto nell'equazione:

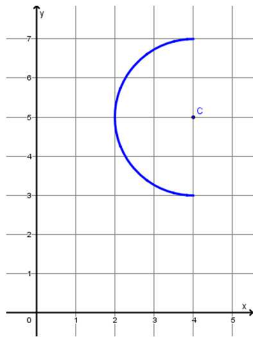
$$\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+3-6+k+1=0 \qquad k=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

2. Traccia il grafico della curva di equazione $x=4-\sqrt{10y-y^2-21}$.

$$\begin{cases} x^2-8x+16=10y-y^2-21 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x-10y+37=0 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

Semicirconferenza di centro $C\ (4;5)$ e raggio $r=2$



3. Rappresenta la circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x-2y=0$ e la retta r di equazione $y=-x+2$. Trova la misura della corda intercettata dalla retta sulla circonferenza.

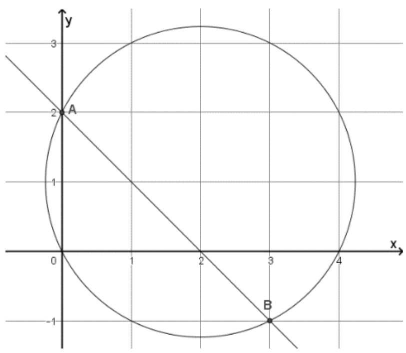
Determino le coordinate dei punti di intersezione tra circonferenza e retta:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y=0 \\ y=-x+2 \end{cases} \qquad x^2+x^2-4x+4-4x+2x-4=0$$

$$x^2-3x=0 \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

Ora determino la distanza tra i due punti $A\ (0;2)$ e $B\ (3;\ -1)$:

$$\overline{AB}=\sqrt{9+9}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$



4. Trova le equazioni delle tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 = 5$ parallele alla retta $y = -2x$. Determina l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine, passante per i punti di contatto fra le tangenti trovate e la circonferenza data e avente un vertice nel punto $A\ (3; 0)$.

Considero l'equazione del fascio improprio di rette parallele alla retta data: $y = -2x + k$. Impongo che la distanza di una qualsiasi retta del fascio dal centro della circonferenza (ovvero l'origine) sia uguale al raggio (ovvero: $\sqrt{5}$):

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \qquad\qquad k = \pm 5$$

Le due rette hanno equazione: $y = -2x \pm 5$.

Metto a sistema le due rette con la circonferenza per determinare i punti di intersezione, ma, per le richieste del problema, basta un punto:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2x + 5 \end{cases} \qquad x^2 + 4x^2 + 25 - 20x = 5 \qquad x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Determino l'equazione dell'ellisse e visto che conosco le coordinate del vertice sull'asse x, so che: $a = 3$.
Perciò impongo il passaggio dell'ellisse per il punto determinato, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{b^2} = 1 \qquad \frac{1}{b^2} = \frac{5}{9} \qquad b^2 = \frac{9}{5} \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{5y^2}{9} = 1 \qquad \boldsymbol{x^2 + 5y^2 = 9}$$

5. Determina l'equazione della retta tangente all'ellisse di equazione $x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$ nel suo punto di coordinate $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Utilizzo la formula di sdoppiamento:

$$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1 \qquad\qquad \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 1 \qquad\qquad \boldsymbol{2x + 3y - 4 = 0}$$

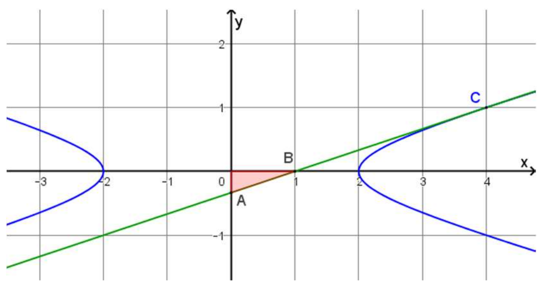
6. Determina l'area del triangolo che la tangente nel punto $C\ (4; 1)$ all'iperbole di equazione $x^2 - 12\ y^2 = 4$ forma con gli assi di simmetria dell'iperbole.

Il punto appartiene all'iperbole, perciò applico la formula di sdoppiamento:

$$4x - 12y = 4 \qquad\qquad x - 3y - 1 = 0$$

Gli assi di simmetria dell'iperbole sono gli assi cartesiani, perciò determino i punti di intersezione della retta tangente con gli assi:

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$



Il triangolo che si è formato è rettangolo e i suoi cateti hanno misura, rispettivamente, l'ordinata in valore assoluto del punto di intersezione con l'asse y e l'ascissa del punto di intersezione con l'asse x. Perciò posso determinare l'area del triangolo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

7. $(4-2^{3x})(x-1) \geq 0$

$IF \geq 0: \quad 4-2^{3x} \geq 0 \quad 2^{3x} \leq 2^2 \quad 3x \leq 2 \quad x \leq \frac{2}{3}$

$IIF \geq 0: \quad x-1 \geq 0 \quad x \geq 1$

Effettuando lo studio dei segni, otteniamo:

$$\boldsymbol{\frac{2}{3} \leq x \leq 1}$$

8. $3 \cdot 5^{2(x-2)} + 5^x \geq 13 \cdot 5^{x-2} + 15$

Pongo $5^x = t$:

$$3 \cdot \frac{t^2}{625} + t \geq 13 \frac{t}{25} + 15 \qquad t^2 + 100\,t - 3125 \geq 0$$

$$t_{1,2} = -50 \pm \sqrt{2500+3125} = -50 \pm 75 = \left\langle \begin{matrix} 25 \\ -125 \end{matrix} \right.$$

$$t \leq -125 \quad \vee \quad t \geq 25$$

$$5^x \leq -125 \quad \vee \quad 5^x \geq 25 \qquad \boldsymbol{x \geq 2}$$

9. $\log\,(x+5) - \log\,(x+3) = \log\,4$

$$\log\,(x+5) = \log\,4\,(x+3) \qquad x+5 = 4x+12 \qquad 3x = -7 \qquad \boldsymbol{x = -\frac{7}{3}\ acc.}$$

10. $\log_4(x^2+15) > 3$

$$\begin{cases} x^2+15 > 0 \\ x^2+15 > 4^3 \end{cases} \qquad x^2 > 64-15 \qquad x^2 > 49 \qquad \boldsymbol{x < -7 \quad \vee \quad x > 7}$$