EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1. $4\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3=0$

$\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$ $\quad\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$ $\quad\begin{matrix}2x=k\pi\\ 2x=-\frac{2}{3}\pi+k\pi\end{matrix}$ $\quad\begin{matrix}\boldsymbol{x=k\frac{\pi}{2}}\\ \boldsymbol{x=-\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}}\end{matrix}$

2. $\frac{4\sin^2 3x-1}{\cos x}=1+2\sin\frac{7}{6}\pi$

$\frac{4\sin^2 3x-1}{\cos x}=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\quad\frac{4\sin^2 3x-1}{\cos x}=0$ $\quad 4\sin^2 3x-1=0$

$\sin^2 3x=\frac{1}{4}$ $\quad\sin 3x=\pm\frac{1}{2}$ $\quad 3x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ $\quad\boldsymbol{x=\pm\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}}$

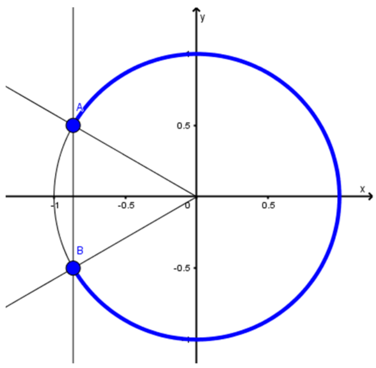
3. $\cos x+3\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+4\geq 0$

$2\cos^2\frac{x}{2}-1+3\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+4\geq 0$ $\quad 2\cos^2\frac{x}{2}+3\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+3=0$ $\quad\cos\frac{x}{2}=\frac{-3\sqrt{3}\pm\sqrt{3}}{4}=\left\langle\begin{matrix}-\sqrt{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right.$

$\cos\frac{x}{2}\leq-\sqrt{3}\quad\vee\quad\cos\frac{x}{2}\geq-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ovvero:

$\cos\frac{x}{2}\geq-\frac{\sqrt{3}}{2}$



$-\frac{5}{6}\pi+2k\pi\leq\frac{x}{2}\leq\frac{5}{6}\pi+2k\pi$ $\quad\boldsymbol{-\frac{5}{3}\pi+4k\pi\leq x\leq\frac{5}{3}\pi+4k\pi}$

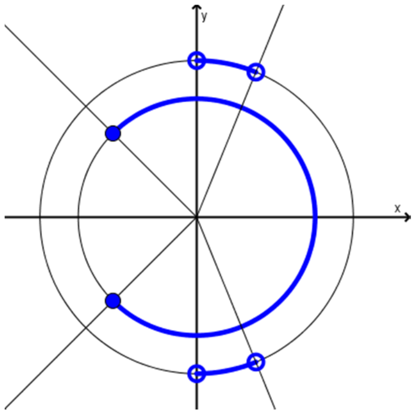
4. $\begin{cases} \sqrt{2}\cos^2 x + \left(1+2\sqrt{2}\right)\cos x + 2 \geq 0 \\ \cos 2x - \cos x + 1 < 0 \end{cases}$

$$A:\ \cos x = \frac{-1-2\sqrt{2} \pm \sqrt{1+8+4\sqrt{2}-8\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1-2\sqrt{2} \pm \left(1-2\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 \end{matrix} \right. \qquad \cos x \leq -2 \quad \vee \quad \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B: 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 < 0 \qquad 2\cos^2 x - \cos x < 0 \qquad 0 < \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 < \cos x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee$$
$$\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

NUMERI COMPLESSI

5. $x^4 + 64 = 0$

$$x = \sqrt[4]{-64} \qquad z^4 = -64 = 64\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) \qquad z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$$

$k = 0$: $\quad z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{2\,(1+i)}$

$k = 1$: $\quad z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = \mathbf{2\,(-1+i)}$

$k = 2$: $\quad z_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) = \mathbf{-2\,(1+i)}$

$k = 3$: $\quad z_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \mathbf{2\,(1-i)}$

6. $x^2 - 4x + 13 = 0$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = \mathbf{2 \pm 3i}$$

7. $x^3 - 8i = 0$

$x^3 + 8i^3 = 0 \qquad (x + 2i)(x^2 - 2ix - 4) = 0 \qquad x_1 = \boldsymbol{-2i} \qquad x_{2,3} = i \pm \sqrt{-1+4} = \boldsymbol{i \pm \sqrt{3}}$

CALCOLO COMBINATORIO

8. In una delegazione di quattro studenti devono essere presenti due maschi e due femmine. Calcola la probabilità che, scegliendo a caso, vi sia alternanza tra maschi e femmine.

La richiesta del testo comprende due diverse delegazioni: MFMF o FMFM, perciò:

$$2 \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

9. Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di numeri compresi tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi? Giustificare la risposta.

Simulazione ministeriale del 22 Aprile 2015

Nel codice, composto da due lettere e da alcuni numeri, la scelta possibile per ogni cifra è così data:

26	**26**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**...**

Perciò:

$$26 \cdot 26 \cdot 10^n \geq 5 \cdot 10^6 \qquad 10^n \geq 7396 \qquad \boldsymbol{n \geq 4}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

10. Lanciando una moneta sei volte, qual è la probabilità che si ottenga testa «al più» due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa «almeno» due volte?

Prova d'esame – Corso di ordinamento 2015 – Sessione ordinaria, quesito 3

Per risolvere il problema, utilizziamo il teorema di Bernoulli delle prove ripetute.

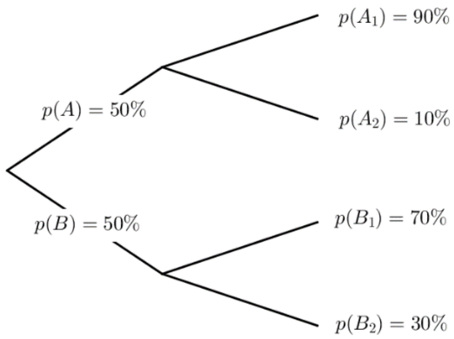
Per ottenere testa «al più» due volte:

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{15}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32} = \boldsymbol{34,4\%}$$

Per ottenere testa «almeno» due volte:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1 - \frac{1}{64} - \frac{6}{64} = \frac{57}{64} = \boldsymbol{89,1\%}$$

11. Due dispositivi hanno la probabilità di funzionare del 90% e del 70%. Se ne sceglie uno a caso. Calcola la probabilità che non funzioni.



$$p\big((A \cap A_2) \cup (B \cap B_2)\big) = \frac{50}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{50}{100} \cdot \frac{30}{100} = \mathbf{20\ \%}$$

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

12. Trovare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica avente come centro l'origine e raggio 2, nel suo punto di coordinate $(1; 1; z)$, con z negativa.

Pongo la distanza del generico punto di tangenza dal centro della sfera uguale al raggio, in modo da determinare le coordinate del punto:

$$1 + 1 + z^2 = 4 \qquad z^2 = 2 \qquad z = \pm\sqrt{2}$$

Visto che il punto deve avere quota negativa, il punto di tangenza è:

$$P\big(1; 1; -\sqrt{2}\big)$$

Determino le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$, che sono anche i parametri direttori del piano da determinare:

$$\overrightarrow{OP} = \big(1; 1; -\sqrt{2}\big) \qquad \alpha: 1\,(x-1) + 1\,(y-1) - \sqrt{2}\,\big(z + \sqrt{2}\big) = 0$$

$$\alpha: \boldsymbol{x + y - z\sqrt{2} - 4 = 0}$$

13. In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio $Oxyz$ sono dati i punti $A\ (-3;\ 4;\ 0)$ e $C\ (-2;\ 1;\ 2)$. I tre punti O, A e C giacciono su un piano E. Determina l'equazione che descrive il piano E.

Prova d'esame – Corso di ordinamento 2015 – Sessione suppletiva, quesito 4

Il generico piano E ha equazione:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Impongo il passaggio del generico piano per i punti dati, sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione:

$$\begin{cases} d = 0 \\ -3a + 4b + d = 0 \\ -2a + b + 2c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 0 \\ b = \dfrac{3}{4}a \\ -2a + \dfrac{3}{4}a + 2c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \dfrac{3}{4}a \\ c = \dfrac{5}{8}a \\ d = 0 \end{cases}$$

Perciò:

$$ax + \frac{3}{4}ay + \frac{5}{8}az = 0 \qquad \boldsymbol{E: 8x + 6y + 5z = 0}$$