1. Quattro amici hanno totalizzato 20 000 punti in un videogioco. Completa la seguente tabella:

Nome	Punti	Percentuale
Andrea	2 800	**14 %**
Bruno	**6 000**	30 %
Carlo	**8 200**	**41 %**
Davide	3 000	**15 %**

Calcolo innanzi tutto il 30 % di 20 000: $30:100 = x:20000 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{30}{100} \cdot 20000 = 6000$
Per differenza, trovo i punti di Carlo, sapendo che il totale è di 20 000: $20\,000 - 6\,000 - 2\,800 - 3\,000 = 8\,200$.
Ora posso ricavare la percentuale di Davide che, avendo la metà dei punti di Bruno, avrà anche metà percentuale: 15 %.
Ora ricavo la percentuale di Carlo, con la proporzione: $x:100 = 8200:20000 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{8200}{20000} \cdot 100 = 41$.
Per differenza, ricavo anche la percentuale di Andrea: $100 - 30 - 41 - 15 = 14$

2. Calcola la media aritmetica, la media geometrica, la media armonica, la media quadratica, la moda, la mediana, la varianza e la deviazione standard della seguente distribuzione di dati:

13	8	20	13	19	11

Applicando le formule, posso ricavare:

$$M = \frac{\sum_1^6 x_i}{6} = \mathbf{14} \qquad G = \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \mathbf{13,35} \qquad A = \frac{6}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_6}} = \mathbf{12,70} \qquad Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2}{6}} = \mathbf{14,63}$$

dove M indica la media aritmetica, G quella geometrica, A quella armonica, Q quella quadratica.

La moda è **13**, ovvero il valore con la frequenza massima (2).

Per determinare la mediana, metto i numeri in ordine: 8, 11, 13, 13, 19, 20, perciò la mediana è **13**, ovvero la media aritmetica dei due valori centrali.
Infine, applicando le formule degli indici di variabilità, determino varianza e deviazione standard:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \cdots + (x_6 - M)^2}{6} = \mathbf{18} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \cdots + (x_6 - M)^2}{6}} = \mathbf{4,24}$$

3. Dimostra che la media geometrica è sempre maggiore della media armonica nel caso di due valori positivi e diversi tra loro.

Siano x_1 e x_2 due valori positivi diversi tra loro. Devo dimostrare che: $\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} < \sqrt{x_1 x_2}$

Trattandosi di due valori positivi, posso elevare entrambi i membri al quadrato, dopo aver ridotto la frazione a primo membro:

$$\frac{2}{\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}} < \sqrt{x_1 x_2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 < x_1 x_2 \quad \Longrightarrow \quad 4x_1 x_2 < (x_1 + x_2)^2 \quad \Longrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 > 4x_1 x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 > 0$$

E questa disequazione vale per ogni coppia di valori diversi tra loro, come ipotizzato.

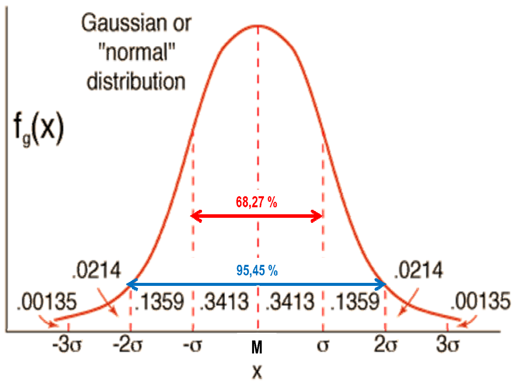
4. Una macchina confeziona sacchetti di caramelle del peso medio di 200 g con una deviazione standard di 10 g.
   A. Calcola la percentuale di sacchetti che pesano più di 220 g.
   B. Calcola la percentuale di sacchetti che pesano più di 190 g.
   C. Se ad un controllo vengono scartati i sacchetti con un peso inferiore a 180 g, su 1000 sacchetti quanti si prevede verranno scartati?

Dalla curva di Gauss rappresentata a lato, possiamo ricavare i risultati richiesti:

A. I sacchetti che pesano più di 220 g sono situati nella curva che si ottiene per valori maggiori di $M + 2\sigma$, la cui percentuale corrisponde a: **2,28 %**.

B. I sacchetti che pesano più di 190 g sono situati nella curva che si ottiene per valori maggiori di $M - \sigma$, la cui percentuale corrisponde a: **84,14 %**.

C. Vengono scartati i sacchetti che hanno valori minori di $M - 2\sigma$, ovvero la cui percentuale è **2,28 %**. Da questa percentuale, con una proporzione, possiamo ricavare il numero di sacchetti scartati, ovvero **23** sacchetti.

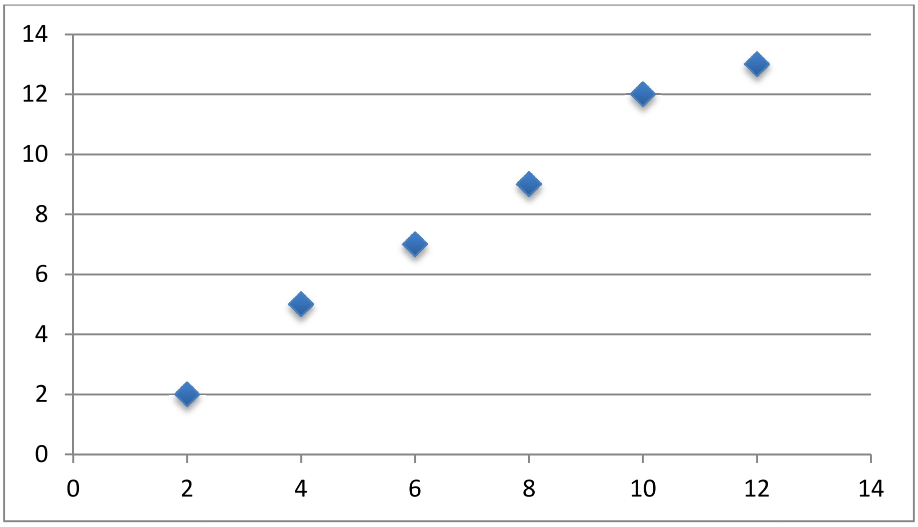


5. In un esperimento abbiamo ottenuto le seguenti coppie di valori per le variabili X e Y:

x_i	2	4	6	8	10	12
y_i	2	5	7	9	12	13

   A. Rappresenta il diagramma a dispersione.
   B. Determina l'equazione della retta interpolante con il metodo dei minimi quadrati.
   C. Verifica la bontà dell'accostamento calcolando l'indice quadratico relativo.
   D. Calcola l'indice di correlazione.

A. Rappresento innanzi tutto il grafico a dispersione:



B. La retta interpolante ha equazione ottenibile con la formula $y - \overline{y} = a\ (x - \overline{x})$ dove $a = \frac{\sum x'_i y'_i}{\sum x'^2_i}$.

Calcolo i valori che servono per applicare le formule e li riporto in una tabella. Nelle ultime tre colonne riporto anche i valori necessari per il calcolo dell'indice quadratico relativo, valori che posso calcolare dopo aver trovato la funzione interpolante. La colonna y'^2_i non serve per il calcolo della retta interpolante, ma serve per l'indice di correlazione.

	x_i	y_i	x'_i	y'_i	$x'_i y'_i$	x'^2_i	y'^2_i	$f\ (x_i)$	$y_i - f\ (x_i)$	$(y_i - f\ (x_i))^2$
	2	2	-5	-6	30	25	36	2,43	-0,43	0,18
	4	5	-3	-3	9	9	9	4,66	0,34	0,12
	6	7	-1	-1	1	1	1	6,89	0,11	0,01
	8	9	1	1	1	1	1	9,11	-0,11	0,01
	10	12	3	4	12	9	16	11,34	0,66	0,43
	12	13	5	5	25	25	25	13,57	-0,57	0,33
somma	**42**	**48**			**78**	**70**	**88**	**48**		**1,09**
media	**7**	**8**								

Equazione della retta interpolante: $y - 8 = 1{,}1143\ (x - 7)$ $\boldsymbol{y = 1,1143\ x + 0,2}$

C. Calcolo l'indice quadratico relativo I:

$$I = \frac{\sqrt{\frac{\sum_1^6 \left(y_i - f\ (x_i)\right)^2}{6}}}{\frac{\sum_1^6 f\ (x_i)}{6}} \approx \mathbf{0,05317}$$

Essendo l'indice minore di 0,1, possiamo dire che la funzione trovata è adatta a rappresentare il fenomeno studiato.

D. Utilizzando i dati della tabella, posso calcolare l'indice di correlazione lineare di Bravais-Pearson:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 \sum (y_i - \overline{y})^2}} = \mathbf{0,9938}$$

L'indice ci dice che siamo molto vicini a una correlazione perfetta.

6. Si è rilevato il tipo di letture preferite da un gruppo di ragazzi e ragazze:

	Romanzo	Saggio	Giallo
Maschi	25	5	15
Femmine	35	11	9

Dopo aver verificato che le due modalità non sono indipendenti calcola gli indici χ^2 e C.

Costruisco una tabella teorica nella quale ho perfetta indipendenza: in essa, ogni frequenza interna o congiunta si ottiene moltiplicando il totale della sua riga per il totale della sua colonna e dividendo il prodotto per il totale delle osservazioni:

	Romanzo	Saggio	Giallo	Totale
Maschi	25	5	15	45
Femmine	35	11	9	55
Totale	60	16	24	100

	Romanzo	Saggio	Giallo	Totale
Maschi	27	7,2	10,8	45
Femmine	33	8,8	13,2	55
Totale	60	16	24	100

Calcolo la contingenza, ovvero la differenza fra la frequenza assoluta rilevata e la corrispondente frequenza assoluta teorica:

	Romanzo	Saggio	Giallo
Maschi	-2	-2,2	4,2
Femmine	2	2,2	-4,2

Posso calcolare l'indice χ^2:

$$\chi^2 = \frac{4}{27} + \frac{4{,}84}{7{,}2} + \frac{17{,}64}{10{,}8} + \frac{4}{33} + \frac{4{,}84}{8{,}8} + \frac{17{,}64}{13{,}2} \approx \mathbf{4,4613}$$

Ora posso calcolare l'indice χ^2 normalizzato:

$$C = \frac{\chi^2}{N\,(h-1)} = \frac{4{,}4613}{100} = \mathbf{0,0446}$$