1. $\frac{x-1}{2}-\frac{3x-x^2}{3}=x+\frac{1}{3}$

$$3x-3-6x+2x^2=6x+2 \qquad 2x^2-9x-5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{4}\left\langle \begin{array}{l} \mathbf{5} \\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{array}\right.$$

2. $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}+\frac{x+6}{6-x}$

$$\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}-\frac{x+6}{x-6} \qquad 6x-3\,(x-6)=x\,(x-6)-6\,(x+6) \qquad C.A.: x\neq 6$$

$$6x-3x+18=x^2-6x-6x-36 \qquad x^2-15x-54=0$$

$$x_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225+216}}{2}\left\langle \begin{array}{l} \mathbf{18} \\ \mathbf{-3} \end{array}\right.$$

3. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x^2-1}$

$$\frac{x-1-x-1}{x^2-1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x^2-1}$$

$$\frac{-3}{x^2-1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=0$$

$$\frac{-3\,(x^2-1)+(x-1)^2+(x+1)^2}{(x^2-1)^2}=0 \qquad C.A.: x\neq\pm 1$$

$$-3x^2+3+x^2-2x+1+x^2+2x+1=0 \qquad x^2-5=0 \qquad x=\pm\sqrt{\mathbf{5}} \qquad \boldsymbol{acc.}$$

4. $x^2-2\,(a+3b)x+12\,ab=0$

$$\frac{\Delta}{4}=(a+3b)^2-12ab=a^2+9b^2+6ab-12ab=a^2+9b^2-6ab=(a-3b)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{a+3b\pm(a-3b)}{1}\left\langle \begin{array}{l} \boldsymbol{2a} \\ \boldsymbol{6b} \end{array}\right.$$

5. $(b+1)\,x^2-(2+3b+3b^2)\,x+6b=0$

Se $b=-1$: $\quad -2x-6=0 \qquad x=-3$

Se $b\neq -1$: $\Delta=(2+3b+3b^2)^2-24b\,(b+1)=4+9b^2+9b^4+12b+12b^2+18b^3-24b^2-24b=$

$=4+9b^2+9b^4-12b-12b^2+18b^3=(2-3b-3b^2)^2$

$$x_{1,2}=\frac{2+3b+3b^2\pm(2-3b-3b^2)}{2\,(b+1)}\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{b}+\mathbf{1}} \\ 2\dfrac{3b+3b^2}{2\,(b+1)}=\boldsymbol{3b} \end{array}\right.$$

6. $12\,x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$$x\,(12x^3 - 8x^2 - 3x + 2) = 0$$
$$x\,[\,4x^2\,(3x-2) - 1\,(3x-2)] = 0$$
$$x\,(3x-2)(4x^2-1) = 0$$
$$x_1 = \mathbf{0} \qquad x_2 = \mathbf{\frac{2}{3}} \qquad x_{3,4} = \pm\mathbf{\frac{1}{2}}$$

7. $(x^2-12)(x^2-15) = 130$

$$x^4 - 27x^2 + 180 = 130 \qquad x^4 - 27x^2 + 50 = 0$$
$$(x^2-25)(x^2-2) = 0$$
$$x_{1,2} = \pm\mathbf{5} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{\mathbf{2}}$$

8. $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$

Dopo aver verificato che $x = 0$ non è una soluzione dell'equazione per x^2:

$$2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \qquad 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

Pongo: $x + \frac{1}{x} = y$, perciò: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y^2 \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

$$2\,(y^2-2) - 9y + 14 = 0 \qquad 2\,y^2 - 9y + 10 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{4} \left\langle \begin{array}{l} \mathbf{\frac{5}{2}} \\ \mathbf{2} \end{array} \right.$$

Perciò:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \qquad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \left\langle \begin{array}{l} \mathbf{2} \\ \mathbf{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \qquad x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0 \qquad x_{3,4} = \mathbf{1}$$

9. $(x^2-8x)^2 + 19\,(x^2-8x) + 84 = 0$

Pongo: $x^2 - 8x = y$, perciò: $\qquad y^2 + 19y + 84 = 0 \qquad y_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{361-336}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \mathbf{-7} \\ \mathbf{-12} \end{array} \right.$

Perciò:

$$x^2 - 8x = -7 \qquad x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-7}}{1} \left\langle \begin{array}{l} \mathbf{7} \\ \mathbf{1} \end{array} \right.$$

$$x^2 - 8x = -12 \qquad x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{1} \left\langle \begin{array}{l} \mathbf{6} \\ \mathbf{2} \end{array} \right.$$

10. Determina per quali valori di k l'equazione $kx^2 - 2\,(k+10)\,x + 75 + k = 0$ ha:

A. soluzioni reali;
B. soluzioni opposte;
C. soluzioni reciproche;
D. una soluzione uguale a 3;
E. la somma dei quadrati delle soluzioni uguale a 4

A. Perché le soluzioni siano reali, devo avere: $\frac{\Delta}{4} \geq 0$:

$$(k+10)^2 - k\,(75+k) \geq 0 \qquad k^2 + 20k + 100 - 75k - k^2 \geq 0$$

$$-55k \geq -100 \qquad \boldsymbol{k \leq \frac{20}{11}}$$

B. Perché le soluzioni siano opposte, ovvero: $x_1 + x_2 = 0$, il coefficiente del termine di primo grado deve essere nullo, ovvero:

$$k + 10 = 0 \qquad k = \boldsymbol{-10}$$

C. Perché le soluzioni siano reciproce, ovvero: $x_1 = \frac{1}{x_2}$ ovvero: $x_1 x_2 = 1$:

$$\frac{c}{a} = 1 \qquad \frac{75+k}{k} = 1 \qquad 75 + k = k \qquad \boldsymbol{\nexists k \in \mathbb{R}}$$

D. Per trovare il valore di k per cui una delle soluzioni sia 3, sostituisco 3 nell'equazione:

$$9k - 6\,(k+10)\ + 75 + k = 0 \qquad 9k - 6k - 60 + 75 + k = 0 \qquad k = \boldsymbol{-\frac{15}{4}}$$

E. $x_1^2 + x_2^2 = 4$ $\qquad (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 \qquad \left(\frac{2\,(k+10)}{k}\right)^2 - 2\,\frac{75+k}{k} = 4$

$$2k^2 + 40k + 200 - 75k - k^2 = 2k^2 \qquad k^2 + 35k - 200 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 + 800}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \boldsymbol{5\ non\ acc.} \\ \boldsymbol{-20\ acc.} \end{array} \right.$$