1. $\dfrac{2-\frac{1}{3}x}{5}-\dfrac{1-\frac{2}{3}x}{4}<2-\dfrac{\frac{1}{2}-3x}{10}$

$8-\dfrac{4}{3}x-5+\dfrac{10}{3}x<40-1+6x \qquad 3+2x<39+6x \qquad -4x<36 \qquad \boldsymbol{x>-9}$

2. $(3x+1)^2-4x\,(x-2)\leq 5x\,(x+6)-16\,x$

$9x^2+6x+1-4x^2+8x\leq 5x^2+30x-16\,x \qquad 1\leq 0 \qquad \boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$

3. $xa^2+2x-a^2>2$

$x\,(a^2+2)>a^2+2 \qquad \boldsymbol{x>1}$

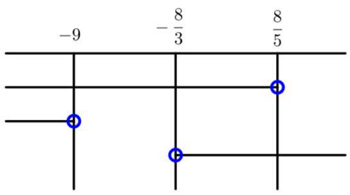
4. $\dfrac{ax-7}{3}<a-2x+\dfrac{5-a}{3}$

$ax-7<3a-6x+5-a \qquad (a+6)\,x<12+2a \qquad (a+6)\,x<2\,(a+6)$

$\boldsymbol{Se\ a=-6:\ 0x<0 \quad \nexists x\in\mathbb{R}} \qquad \boldsymbol{Se\ a<-6:\ x>2} \qquad \boldsymbol{Se\ a>-6:\ x<2}$

5. $\begin{cases} 7-2x>3x-1 \\ x+9<0 \\ 4\,(x+1)+3>x-1 \end{cases}$

$\begin{cases} -5x>-8 \\ x<-9 \\ 4x+4+3>x-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<\dfrac{8}{5} \\ x<-9 \\ 3x>-8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<\dfrac{8}{5} \\ x<-9 \\ x>-\dfrac{8}{3} \end{cases}$



$\boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$

6. $\dfrac{3+x}{x+2}-\dfrac{1}{2x+4}\geq 1$

$\dfrac{3+x}{x+2}-\dfrac{1}{2\,(x+2)}-1\geq 0 \qquad \dfrac{2\,(3+x)-1-2\,(x+2)}{2\,(x+2)}\geq 0 \qquad \dfrac{6+2x-1-2x-4}{x+2}\geq 0$

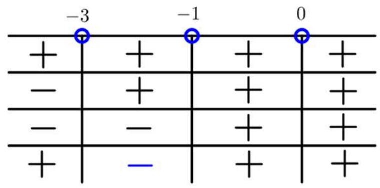
$\dfrac{1}{x+2}\geq 0 \qquad x+2>0 \qquad \boldsymbol{x>-2}$

7. $\frac{x^4+4x^2}{x^2+4x+3}<0$

$$\frac{x^2(x^2+4)}{(x+3)(x+1)}<0 \qquad \frac{x^2}{(x+3)(x+1)}<0$$

$N>0:\ x\neq 0$
$D_1>0:\ x>-3$
$D_2>0:\ x>-1$

Ho potuto semplificare x^2+4 che, in quanto somma di quadrati, è sempre positivo

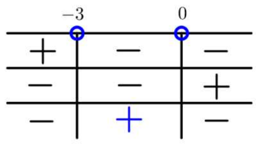


$$-3<x<-1$$

8. $\begin{cases} \frac{2}{3}>\frac{1+x}{x} \\ \frac{1+x}{2x}+2>0 \end{cases}$

$$\frac{2x-3\,(1+x)}{3x}>0 \qquad \frac{-x-3}{3x}<0$$

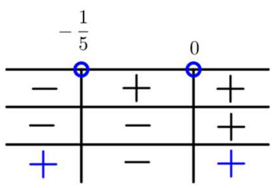
$N>0:\ x<-3$
$D>0:\ x>0$



$$-3<x<0$$

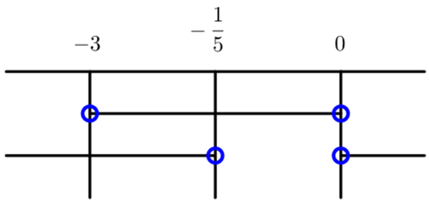
$$\frac{1+x+4x}{2x}>0 \qquad \frac{5x+1}{2x}>0$$

$N>0:\ x>-\frac{1}{5}$
$D>0:\ x>0$



$$x<-\frac{1}{5} \quad \vee \quad x>0$$

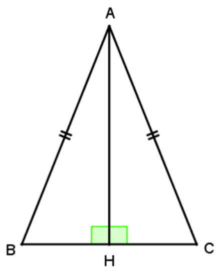
$$\begin{cases} -3<x<0 \\ x<-\frac{1}{5} \quad \vee \quad x>0 \end{cases}$$



$$-3<x<-\frac{1}{5}$$

9. Svolgi uno dei seguenti esercizi di geometria euclidea a tua scelta:

- In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana relativa alla base e bisettrice dell'angolo al vertice.



Hp:
$AB \cong AC$
$H \in BC$
$AH \perp BC$

Tesi:
$BH \cong HC$
$B\hat{A}H \cong H\hat{A}C$

Dimostrazione:

Consideriamo i triangoli ABH e AHC. Essi hanno:

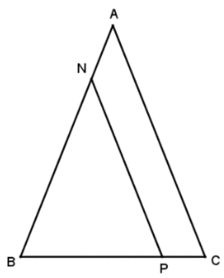
- $AB \cong AC$ per ipotesi
- $B\hat{H}A \cong A\hat{H}C$ perché retti, visto che per ipotesi $AH \perp BC$
- $A\hat{B}H \cong A\hat{C}H$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele

} $ABH \cong AHC$ per il secondo criterio di congruenza generalizzato dei triangoli

Di conseguenza:
- $BH \cong HC$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti, perciò AH è anche mediana relativa alla base.
- $B\hat{A}H \cong H\hat{A}C$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti, perciò AH è anche bisettrice dell'angolo al vertice.

c.v.d.

- Considera un triangolo isoscele ABC di base BC. Da un punto P della base conduci la parallela al lato AC che interseca AB in N. Dimostra che il triangolo BPN è isoscele.



Hp:
$AB \cong AC$
$P \in BC \qquad N \in AB$
$PN \parallel AC$

Tesi:
$BPN\ isoscele$

Dimostrazione:

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti, perciò $A\hat{B}C \cong B\hat{C}A$ (*)

Considerando le parallele (per ipotesi) PN e AC con la trasversale BC, $B\hat{P}N \cong B\hat{C}A$ (**) perché angoli corrispondenti in rette parallele tagliate da una trasversale.

Perciò:

$$A\hat{B}C \underset{(*)}{\cong} B\hat{C}A \underset{(**)}{\cong} B\hat{P}N \qquad \Rightarrow \qquad A\hat{B}C \cong B\hat{P}N$$

Il triangolo BPN ha due angoli congruenti, perciò è isoscele di base BP.

c.v.d.

10. Un lucchetto numerico ha come chiave un numero a tre cifre. Avendo le seguenti informazioni, determina i tre numeri, motivando accuratamente il tuo risultato:
    A. 682: un numero è corretto e al posto giusto
    B. 614: un numero è corretto ma al posto sbagliato
    C. 206: due numeri sono corretti ma al posto sbagliato
    D. 738: nessun numero è corretto
    E. 780: un numero è corretto ma al posto sbagliato

Se in 682 e in 614 ci sono, rispettivamente, un numero corretto e al posto giusto e un numero corretto ma nel posto sbagliato, possiamo escludere che il numero in questione sia il 6, che non si troverà nella combinazione finale. La terza informazione ci dice, quindi, che due delle tre cifre sono **2** e **0**. La quarta informazione, con 7, 3 e 8 non corretti, ci permette di dedurre che in 682 il numero al posto giusto è il 2. Perciò:

		2

Siccome in 206 ci sono due numeri corretti ma al posto sbagliato e sono, come detto prima, il 2 e lo 0, allora vuol dire che lo 0 non può che trovarsi al primo posto:

0		**2**

In 780, un solo numero è corretto, ma è al posto sbagliato ed è lo 0, perciò l'ultima informazione non aggiunge nulla a quanto già sappiamo. In 614 c'è un numero corretto, ma al posto sbagliato: la scelta è tra le cifre 1 e 4, ma se fosse l'1 sarebbe corretto e al posto giusto, perciò non ci resta che il **4**:

0	**4**	**2**