Determina per quale valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ si ha:

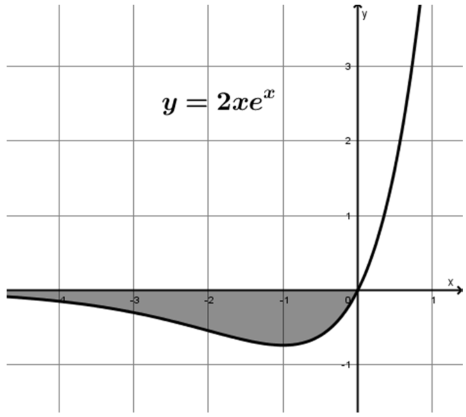
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 + x^2}\right) dx = 2\pi$$

Determino il valore dell'integrale in funzione del parametro e pongo il risultato uguale a quello dato:

$$\lim_{z\to+\infty} \int_{-z}^{z} \left(\frac{k^2 + x^2 - x^2}{k^2 + x^2}\right) dx = k \lim_{z\to+\infty} \int_{-z}^{z} \left(\frac{k}{1 + \left(\frac{x}{k}\right)^2}\right) dx = k \lim_{z\to+\infty} \left[arc\tan\frac{x}{k}\right]_{-z}^{z} = k \lim_{z\to+\infty} \left(arc\tan\frac{z}{k} - arc\tan\left(-\frac{z}{k}\right)\right) = k\pi$$

$$k\pi = 2\pi \qquad k = \mathbf{2}$$

Verifica se le superfici evidenziate nelle figure abbiano area finita calcolandone il valore:



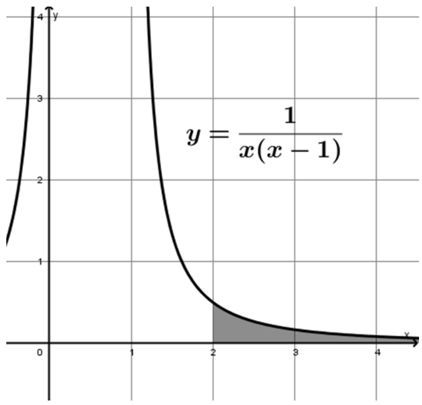
$$\int_{-\infty}^{0} (-2xe^x)\, dx = -2 \lim_{z\to-\infty} \int_{z}^{0} xe^x\, dx = -2 \lim_{z\to-\infty} [xe^x - e^x]_z^0 =$$

Ho applicato il calcolo dell'integrale per parti:

$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$$
$$g'(x) = e^x \qquad g(x) = e^x$$

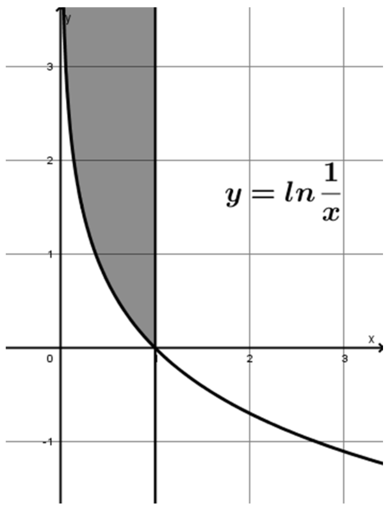
$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$= -2 \lim_{z\to-\infty} [0 - 1 - ze^z + e^z] = \mathbf{2}$$



$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\, dx = \lim_{z\to+\infty} \int_{2}^{z} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \lim_{z\to+\infty} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_2^z =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \ln\frac{1}{2}\right] = \boldsymbol{\ln 2}$$



La funzione rappresentata è invertibile, essendo iniettiva e suriettiva, determino perciò l'inversa per calcolare l'integrale in funzione di y:

$$y = \ln\frac{1}{x} \qquad y = -\ln x \qquad -y = \ln x \qquad x = e^{-y}$$

$$\int_{0}^{+\infty} (1 - e^{-y})\, dy = \lim_{z\to+\infty} \int_{0}^{z} (1 - e^{-y})\, dx = \lim_{z\to+\infty} [y + e^{-y}]_0^z =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} [z + e^{-z} - 0 - 1] = +\infty$$