1. $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{x-1} = \dfrac{1}{3} \\ 3x+y+1=0 \end{cases}$

$$C.A.: x \neq 1 \qquad \begin{cases} 6x+3y = x-1 \\ 3x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} 5x+3y=-1 \\ 3x+y=-1 \end{cases} \\ \hline 2x+2y=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = -\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

2. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-\sqrt{5}} = 1 \\ \dfrac{x+\sqrt{5}}{y} = -3 \end{cases}$

$$C.A.: \begin{cases} x \neq \sqrt{5} \\ y \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = x-\sqrt{5} \\ x+\sqrt{5} = -3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5}+3\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 2\sqrt{5}} \\ \boldsymbol{y = -\sqrt{5}} \end{cases}$$

3. $x^2\sqrt{5}+\sqrt{3} = -x\left(1+\sqrt{15}\right)$

$$x^2\sqrt{5}+x+x\sqrt{15}+\sqrt{3}=0 \quad \Rightarrow \quad x\left(x\sqrt{5}+1\right)+\sqrt{3}\left(x\sqrt{5}+1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x\sqrt{5}+1\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto, è possibile determinare le due soluzioni, ponendo uguali a zero i singoli fattori:

$$x\sqrt{5}+1=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}} \qquad\qquad x+\sqrt{3}=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_2 = -\sqrt{3}}$$

4. $\dfrac{6+x}{x} < \dfrac{2}{x+1}$

$$\frac{(6+x)(x+1)-2x}{x(x+1)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+7x+6-2x}{x(x+1)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+5x+6}{x(x+1)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+1)} < 0$$

$N_1 > 0: \quad x > -2$

$N_2 > 0: \quad x > -3$

$D_1 > 0: \quad x > 0$

$D_2 > 0: \quad x > -1$

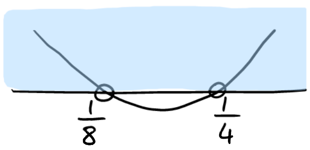
	-3		-2		-1		0	
$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$-$		$+$		$+$		$+$		$+$
$-$		$-$		$-$		$-$		$+$
$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

$$\boldsymbol{-3 < x < -2 \quad \vee \quad -1 < x < 0}$$

5. $\dfrac{|6x-1|}{32x^2-12x+1} < 0$

$$N > 0: \quad |6x-1| > 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{1}{6}$$

$$D > 0: \quad 32x^2-12x+1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{32} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{array} \right.$$



$$x < \frac{1}{8} \quad \vee \quad x > \frac{1}{4}$$

		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{4}$	
N	$+$		$+$		$+$		$+$
D	$+$		$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$-$		$+$

$$\boldsymbol{\frac{1}{8} < x < \frac{1}{4} \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{6}}$$

6. $\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0 \\ x^2+y^2-8x-2y+7=0 \end{cases}$

Applicando il metodo di eliminazione e sottraendo la seconda equazione della prima, ottengo: $8x+4y-16=0 \quad \Rightarrow \quad y=-2x+4$
Sostituisco nella prima equazione:

$$x^2+(-2x+4)^2+2(-2x+4)-9=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x^2-16x+16-4x+8-9=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+3=0$$

L'equazione ha evidentemente soluzione $x_1=1$ e la seconda soluzione, dato che il prodotto delle soluzioni è 3, è $x_2=3$, perciò:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$$

7. $x>2+\sqrt{(x-4)^2+1}$

$$\sqrt{(x-4)^2+1}<x-2$$

La soluzione della disequazione data è equivalente al sistema: $\begin{cases} x-2>0 \\ (x-4)^2+1\geq 0 \\ (x-4)^2+1<(x-2)^2 \end{cases}$

La seconda disequazione può essere tolta dal sistema, essendo verificata $\forall x \in \mathbb{R}$, visto che si tratta di una somma di quadrati:

$$\begin{cases} x>2 \\ x^2-8x+16+1<x^2-4x+4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x>2 \\ x>\dfrac{13}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x>\frac{13}{4}}$$

8. Equazioni parametriche:

A. Data l'equazione $(4-k^2)\,x^2-4x+1=0$, con $k\neq\pm 2$, determina il parametro k in modo tale che:

a. le radici siano reali;

$$\frac{\Delta}{4}\geq 0:\ \ 4-(4-k^2)\geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4-4+k^2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad k^2\geq 0 \quad \forall \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}-\{\pm\boldsymbol{2}\}$$

b. le radici siano uguali;

$$\frac{\Delta}{4}=0:\ \ k^2=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=0}$$

c. le radici siano opposte;

$b=0$: $\nexists \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$

d. una radice sia uguale a -2;

$$(-2)^2(4-k^2)-4(-2)+1=0 \quad \Rightarrow \quad 16-4k^2+8+1=0 \quad \Rightarrow \quad k^2=\frac{25}{4} \quad \boldsymbol{k=\pm\frac{5}{2}}$$

e. la somma dei quadrati dei reciproci dia 10.

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=10 \quad \Rightarrow \quad x_1^2+x_2^2=10\,x_1^2x_2^2 \quad \Rightarrow \quad (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-10\,(x_1x_2)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}-10\left(\frac{c}{a}\right)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}-10\frac{c^2}{a^2}=0 \quad \Rightarrow \quad b^2-2ac-10c^2=0$$

$$\Rightarrow \quad 16-2(4-k^2)-10=0 \quad \Rightarrow \quad 8-4+k^2-5=0 \quad \Rightarrow \quad k^2=1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k=\pm 1}$$

B. Determina per quali valori di k l'equazione, in x, $(k+1)x^2-2(k+2)x+4(k+1)=0$ abbia soluzioni la cui somma sia maggiore di -2.

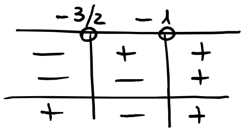
La somma è data dall'opposto del rapporto tra il coefficiente del termine di primo grado e il coefficiente del termine di secondo grado, ma non basta imporre che si verifichi questa condizione, perché devo essere sicura che le soluzioni esistano, perciò devo mettere a sistema la condizione suddetta con il $\Delta \geq 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{2(k+2)}{k+1} > -2 \\ (k+2)^2-4(k+1)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k+2+k+1}{k+1} > 0 \\ k^2+4k+4-4k^2-8k-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2k+3}{k+1} > 0 \\ 3k^2+4k \leq 0 \end{cases}$$

Per la prima disequazione, faccio lo studio dei segni, mentre per la seconda faccio lo studio grafico della parabola:

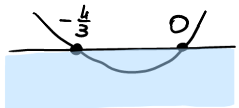
$N>0$: $k > -\dfrac{3}{2}$

$D>0$: $k > -1$



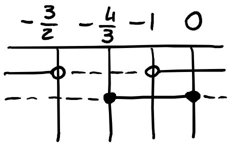
$k < -\dfrac{3}{2} \quad \vee \quad k > -1$

$k(3k+4)=0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0 \quad k_2 = -\dfrac{4}{3}$



$-\dfrac{4}{3} \leq k \leq 0$

$$\begin{cases} k < -\dfrac{3}{2} \quad \vee \quad k > -1 \\ -\dfrac{4}{3} \leq k \leq 0 \end{cases}$$



$\boldsymbol{-1 < k \leq 0}$

9. Determina le condizioni di esistenza delle seguenti funzioni:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{2-x}} + \sqrt{4+x^2} - \frac{7+x}{\sqrt{4+2x+x^2}}$$

$$\begin{cases} 2-x \neq 0 \\ 4+x^2 \geq 0 \\ 4+2x+x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x \neq 2}$$

La seconda disequazione è sempre verificata, perché la somma di quadrati è sempre positiva.
La terza disequazione è sempre verificata, perché si tratta di un falso quadrato, che è sempre positivo.

$$y = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{4x}{3} + \dfrac{8}{\sqrt{162}}}} + \sqrt{2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{4x}{3} + \dfrac{8}{\sqrt{162}} > 0 \\ 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{4x}{3} + \frac{8}{9\sqrt{2}} > 0 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 12x\sqrt{2} + 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(3x + 2\sqrt{2}\right)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

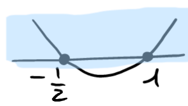
Per risolvere la seconda disequazione, devo abbassare il grado usando l'algoritmo di Ruffini. Prima devo determinare gli zeri del polinomio, applicando il teorema del resto: $P(1)=0$, $P(-1)\neq 0$, $P\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$, $P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$:

	2	-1	1	-1	-1
1		2	1	2	1
	2	1	2	1	//
-1/2		-1	0	-1	
	2	0	2	//	

$(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(2x^2+2) \geq 0$

$2x^2+2 \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$
perché somma di quadrati

$\Rightarrow \quad (x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \geq 0$



$x \leq -\dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x \geq 1$

$$\begin{cases} x \neq -\dfrac{2}{3}\sqrt{2} \\ x \leq -\dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$\boldsymbol{\left(x \leq -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x \geq 1\right) \quad \wedge \quad x \neq -\frac{2}{3}\sqrt{2}}$

10.

A. Determina quale espressione divisa per $\left(\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{y}}\right)$ dà per quoziente xy e resto $3x\sqrt{y}$.

La relazione che lega dividendo (D), divisore (d), quoziente (Q) e resto (R) è: $D = Qd + R$, perciò:

$$D = \left(\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{y}}\right)xy + 3x\sqrt{y} = 5y\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3x\sqrt{y} = \mathbf{5y\sqrt{x}}$$

B. Un numero di due cifre è tale che la somma delle sue due cifre è uguale a 7 e sottraendo al quadrato del numero quello ottenuto da esso invertendo le cifre si ottiene 573. Trova il numero.

Il numero di due cifre da determinare è $N = 10x + y$, con x cifra delle decine e y cifra delle unità. Il testo del problema diventa:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ (10x + y)^2 - (10y + x) = 573 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ (10x + 7 - x)^2 - (70 - 10x + x) = 573 \end{cases}$$

Procedo con la soluzione della seconda equazione del sistema:

$$(9x + 7)^2 - (70 - 9x) - 573 = 0 \quad \Rightarrow \quad 81\,x^2 + 126\,x + 49 - 70 + 9x - 573 = 0$$

$$3x^2 + 5x - 22 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 264}}{6} = \frac{-5 \pm 17}{6} = \left\langle \begin{matrix} \left[-\frac{11}{3}\right] \\ 2 \end{matrix} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N = \mathbf{25}$$

11.

A. La differenza tra i cateti di un triangolo rettangolo è $14\ cm$. L'ipotenusa è lunga $26\ cm$. Trova le lunghezze dei cateti.

Indico il cateto maggiore con x e il cateto minore con y. Per il teorema di Pitagora, secondo il quale in un triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa, l'ipotenusa è data da: $\sqrt{x^2 + y^2}$. Ottengo, quindi le due relazioni:

$$\begin{cases} x - y = 14 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 14 \\ x^2 + (x - 14)^2 = 26^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 14 \\ x^2 + x^2 - 28x + 196 - 676 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 14x - 240 = 0 \qquad x_{1,2} = 7 \pm 17 = \left\langle \begin{matrix} [-10] \\ 24 \end{matrix} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x = 24} \\ \mathbf{y = 10} \end{cases}$$

B. In un triangolo rettangolo l'area è $96\ cm^2$ e la somma dei cateti è $28\ cm$. Determina l'altezza relativa all'ipotenusa.

Indico un cateto con x e l'altro con y. Ottengo, quindi le due relazioni:

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} = 96 \\ x + y = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 192 \\ x + y = 28 \end{cases}$$

Siccome ho bisogno dell'ipotenusa per poter determinare quanto richiesto, dalle relazioni date posso ottenere l'ipotenusa che, per il teorema di Pitagora, secondo il quale in un triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa, l'ipotenusa è data da: $b = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$b = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + y)^2 - 2xy} = \sqrt{28^2 - 2 \cdot 192} = 20$$

Perciò posso ricavare l'altezza, sapendo che:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,b \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2\mathcal{A}}{b} = \frac{2 \cdot 96\ cm^2}{20\ cm} = \mathbf{9,6\ cm}$$

12.

A. A una miscela di $120\ L$ di acqua e sciroppo viene aggiunta una seconda miscela, composta da acqua e sciroppo in parti uguali, ottenendo $180\ L$ di bevanda. Dopo questa operazione la percentuale di acqua presente nella bevanda è uguale a $11/12$ della percentuale di acqua presente nella miscela iniziale. Quanti litri di sciroppo sono contenuti nella bevanda finale?

Indico con x la quantità di acqua presente nella miscela di $120\ L$ e con y la quantità di sciroppo.

La prima miscela è data da: $x + y = 120$ e la percentuale di acqua è data da: $\frac{x}{120}$.

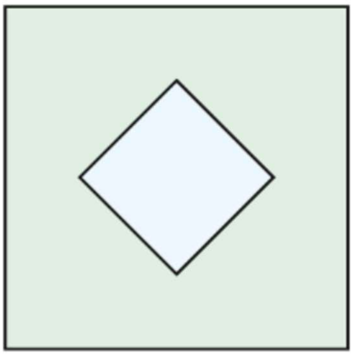
La seconda miscela è data da: $(x + 30) + (y + 30) = 180$ e la percentuale di acqua è data da: $\frac{x+30}{180}$.

Siccome la percentuale di acqua presente nella seconda bevanda è $11/12$ di quella presente nella miscela iniziale, ottengo l'equazione:

$$\frac{x+30}{180} = \frac{11}{12} \cdot \frac{x}{120} \quad \Rightarrow \quad x + 30 = \frac{11\,x}{8} \quad \Rightarrow \quad 8x + 240 = 11x \quad \Rightarrow \quad 3x = 240 \quad \Rightarrow \quad x = 80$$

In quella iniziale ci sono $80\ L$ di acqua e $40\ L$ di sciroppo. Siccome nella seconda aggiungo $30\ L$ di sciroppo, ho in totale $\boldsymbol{70\ L}$.

B. In una città si è costruita un'aiuola quadrata tenuta a prato con al centro una fontana, anch'essa quadrata, disposta come nella **figura 1**. Per i contorni, sia interno che esterno, sono stati usati $176\ m$ di bordo in marmo. Per il contorno esterno però sono serviti $112\ m$ in più che per il contorno interno. Quale superficie è rimasta a prato?



Indico con x il lato della fontana e con y il lato dell'aiuola, perciò la superficie rimasta a prato sarà data da $\mathcal{A} = y^2 - x^2$, ovvero la differenza tra le aree dei due quadrati.
Le due relazioni sono date da:

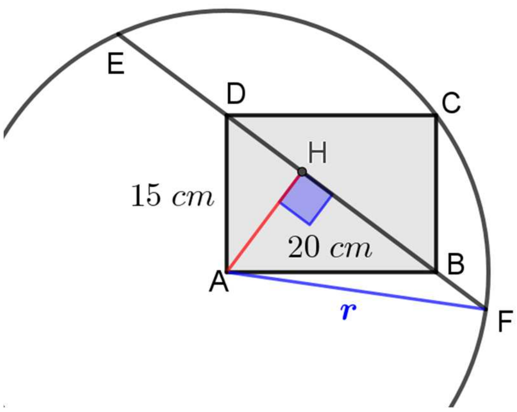
$$\begin{cases} 4x + 4y = 176 \\ 4y - 4x = 112 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 44 \\ y - x = 28 \end{cases}$$

Posso determinare l'area richiesta:

$$\mathcal{A} = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 28\ m \cdot 44\ m = \boldsymbol{1232\ m^2}$$

13.

A. Nella **figura 2**, ABCD è un rettangolo i cui lati sono lunghi $15\ cm$ e $20\ cm$ e la circonferenza ha centro in A e passa per C. Qual è la lunghezza della corda EF?



Il triangolo ABD è rettangolo in A, perciò posso determinarne l'ipotenusa BD con il teorema di Pitagora, secondo il quale in un triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa:

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = 25\ cm$$

Determino l'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa:

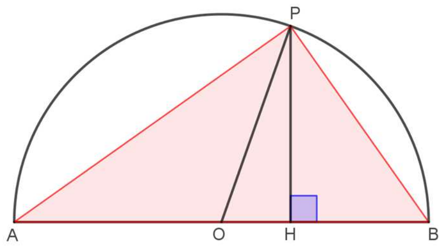
$$\begin{cases} \mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\overline{BD} \cdot \overline{AH} \\ \mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \overline{AD} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \cdot \overline{AH} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{BD}} = 12\ cm$$

A questo punto posso applicare il teorema di Pitagora al triangolo AFH, sapendo che l'ipotenusa è data dal raggio della circonferenza. Il raggio della circonferenza è uguale ad AC, diagonale del rettangolo, e quindi a DB, visto che nel rettangolo le due diagonali sono congruenti e, infine, determino la corda sapendo che la perpendicolare alla corda passante per il centro la divide a metà:

$$\overline{HF} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{481}\ cm \quad \Rightarrow \quad \overline{EF} = 2\overline{HF} = \boldsymbol{2\sqrt{481}\ cm}$$

B. Su una semicirconferenza di diametro AB di $12\ cm$, determina un punto P tale che, detta H la sua proiezione su AB, risulti: $\overline{PH}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=176$. (Dai il risultato in termini di AH).



Innanzi tutto, il triangolo ABP è un triangolo rettangolo, in quanto inscritto in una semicirconferenza e con un lato coincidente con il diametro, perciò posso applicare il teorema di Pitagora, per il quale:

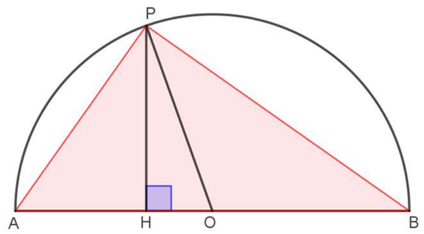
$$\overline{AP}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2=144\ cm^2$$

Quindi, la relazione data diventa:

$$\overline{PH}^2+\overline{AB}^2=176 \quad \Rightarrow \quad \overline{PH}=\sqrt{32}\ cm$$

Applico il teorema di Pitagora al triangolo OHP, per determinare il segmento OH, sapendo che OP è il raggio della circonferenza:

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{(6\ cm)^2-\left(\sqrt{32}\ cm\right)^2}=2\ cm$$



Visto che il problema può essere risolto in due modi, uno simmetrico dell'altro, posso determinare due diverse lunghezze di $\overline{AH}$:

$$\overline{AH}=\overline{AO}-\overline{OH}=6\ cm-2\ cm=\mathbf{4\ cm}$$

$$\overline{AH}=\overline{AO}+\overline{OH}=6\ cm+2\ cm=\mathbf{8\ cm}$$