1. $\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=\frac{7}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=2 \\ (x+y)^3-3xy\,(x+y)=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2 \\ 8-6xy=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Trattandosi di un sistema simmetrico, lo risolviamo con l'equazione di secondo grado associata:

$z^2-2z+\frac{3}{4}=0 \qquad 4z^2-8z+3=0 \qquad z_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{4}=\left\langle \begin{array}{l} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{3}{2}} \\ \boldsymbol{y=\frac{1}{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{y=\frac{3}{2}} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+2y+xy=-4 \\ x+y+2xy=-11 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\,(x+y)+xy=-4 \\ x+y=-2xy-11 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\,(-2xy-11)+xy=-4 \\ x+y=-2xy-11 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=-6 \\ x+y=1 \end{cases}$

Anche in questo caso, si tratta di un sistema simmetrico, perciò lo risolviamo con l'equazione di secondo grado associata:

$z^2-z-6=0 \qquad z_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array}\right.$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=3} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z+1=0 \\ y^2+yz-x=0 \end{cases}$

$\begin{cases} z=y+1 \\ x=-2y-1 \\ y^2+y\,(y+1)-(-2y-1)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=y+1 \\ x=-2y-1 \\ y^2+y^2+y+2y+1=0 \end{cases}$

$2y^2+3y+1=0 \qquad y_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{array}\right.$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{z=\frac{1}{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=-1} \\ \boldsymbol{z=0} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y-20=0 \\ x^2+y^2+10x-2y+8=0 \end{cases}$

Sottraiamo la prima equazione dalla seconda, applicando il metodo di eliminazione. In questo modo, possiamo trovare la x:

$$14x+28=0 \qquad x=-2$$

Sostituiamo il valore così ottenuto nella prima equazione (o nella seconda: è indifferente):

$4+y^2+8-2y-20=0 \qquad y^2-2y-8=0 \qquad y_{1,2}=1\pm\sqrt{1+8}=\left\langle \begin{array}{l} 4 \\ -2 \end{array}\right.$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=4} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2-9-xy=3y \\ \frac{y+9}{y}=\frac{x^2}{y}-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-9-xy=3y \\ y+9=x^2-y \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-9-xy=3y \\ y=\dfrac{x^2-9}{2} \end{cases}$ $x^2-9-x\dfrac{x^2-9}{2}=3\dfrac{x^2-9}{2}$ $C.A.: y\neq 0$

$(x^2-9)\left(1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}\right)=0$

$x^2-9=0 \qquad non\ accettabile, in\ quanto\ risulterebbe\ y=0$

$1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}=0 \qquad -\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2} \qquad x=-1$

$\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-4} \end{cases}$

6. Calcola il perimetro del rettangolo avente area uguale ad a e diagonale uguale a d.

Nel rettangolo, indico le due dimensioni con le incognite x e y e le due condizioni diventano quindi:

$$\begin{cases} xy = a \\ x^2 + y^2 = d^2 \end{cases}$$

Per ottenere la seconda equazione, è stato applicato il teorema di Pitagora: la diagonale del rettangolo è l'ipotenusa e le due dimensioni sono i cateti. A questo punto, possiamo risolvere il sistema simmetrico che abbiamo ottenuto, ricordando che, dato che la richiesta del problema è il perimetro del rettangolo, è sufficiente determinare la somma delle due dimensioni, perché moltiplicando tale somma per 2 otterremo il perimetro:

$$\begin{cases} xy = a \\ (x+y)^2 - 2xy = d^2 \end{cases} \qquad (x+y)^2 - 2a = d^2 \qquad x + y = \sqrt{d^2 + 2a}$$

Consideriamo solo la soluzione positiva, in quanto stiamo parlando di lunghezze di segmenti, quantità che devono essere necessariamente positive:

$$2p = 2(x+y) = \boldsymbol{2\sqrt{d^2 + 2a}}$$

7. Se dividi gli anni di Andrea per quelli di Francesco, ottieni 2 come quoziente e 1 come resto; se invece dividi i quadrati dei loro anni, ottieni 4 come quoziente e 25 come resto. Quanti anni hanno, rispettivamente, Andrea e Francesco?

Indichiamo gli anni di Andrea con la x e quelli di Francesco con la y. Ricordiamo che la relazione tra dividendo (D), divisore (d), quoziente (Q) e resto (R) è data da: $D = Qd + R$, perciò le due condizioni diventano:

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ x^2 = 4y^2 + 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (2y+1)^2 = 4y^2 + 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 4y^2 + 4y + 1 = 4y^2 + 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = 13} \\ \boldsymbol{y = 6} \end{cases}$$

Andrea ha 13 anni e Francesco 6.

8. La somma dei reciproci di due numeri vale $\frac{19}{90}$ e il prodotto del doppio del primo per la terza parte del secondo è uguale a 60. Individua i due numeri.

Indichiamo con x e y i due numeri:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{19}{90} \\ 2x \cdot \frac{1}{3} y = 60 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{19}{90} \\ xy = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+y}{90} = \frac{19}{90} \\ xy = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 19 \\ xy = 90 \end{cases}$$

Trattandosi di un sistema simmetrico, lo risolviamo con l'equazione di secondo grado associata:

$$z^2 - 19z + 90 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 360}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 10 \\ 9 \end{matrix} \right. \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = 10} \\ \boldsymbol{y = 9} \end{cases}$$

I due numeri sono 9 e 10.