Risolvi le seguenti equazioni:

1. $2x^2\,(x+2) = 5\,(x^2+10\,x-5)$

$$2x^3+4x^2-5x^2-50\,x+25=0 \qquad x^2(2x-1)-25\,(2x-1)=0 \qquad (2x-1)(x^2-25)=0$$

$$x_1=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad x_2=\mathbf{5} \qquad x_3=\mathbf{-5}$$

2. $16\,(x-1)^8+31\,(x-1)^4-2=0$

$$Pongo\!:(x-1)^4=y \qquad 16y^2+31y-2=0 \qquad y_{1,2}=\frac{-31\pm\sqrt{961+128}}{32}=\left\langle\begin{array}{l}-2\\ \frac{1}{16}\end{array}\right.$$

$$(x-1)^4=-2 \qquad \boldsymbol{imp.}$$

$$(x-1)^4=\frac{1}{16} \qquad x-1=\pm\frac{1}{2} \qquad x_1=\boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad x_2=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

3. $3\,x^4+10\,x^3-10\,x-3=0$

$P(1)=0 \qquad P(-1)=0$ Applichiamo la regola di Ruffini:

	3	10	0	−10	−3
1		3	13	13	3
	3	13	13	3	0
−1		−3	−10	−3	
	3	10	3	0	

$x_1=\mathbf{1} \qquad x_2=\mathbf{-1}$

$$3x^2+10x+3=0 \qquad x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\left\langle\begin{array}{l}\mathbf{-3}\\ -\boldsymbol{\frac{1}{3}}\end{array}\right.$$

4. $x^2-1=1-x^3$

$$(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2+x+1)=0 \qquad (x-1)(x^2+2x+2)=0 \qquad x_1=\mathbf{1}$$

$$x^2+2x+2=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=1-2<0 \qquad imp.$$

Risolvi e discuti le seguenti equazioni:

5. $5kx^2+2\,(3k+1)\,x+k+2=0$

$$\frac{\Delta}{4}=(3k+1)^2-5k\,(k+2)=9k^2+6k+1-5k^2-10\,k=4k^2-4k+1=(2k-1)^2$$

$$Se\ k\neq 0\!: \qquad x_{1,2}=\frac{-3k-1\pm(2k-1)}{5k}=\left\langle\begin{array}{l}\boldsymbol{\frac{-2-k}{5k}}\\ -\frac{5k}{5k}=\mathbf{-1}\end{array}\right.$$

$$Se\ k=0\!: \qquad 2x+2=0 \qquad x=\mathbf{-1}$$

6. $kx^2+4x-1=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=4+k$

$$Se\ k=0\!: \qquad 4x-1=0 \qquad x=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

$$Se\ k\geq -4\ \wedge\ k\neq 0\!: \qquad x_{1,2}=\boldsymbol{\frac{-2\pm\sqrt{4+k}}{k}}$$

$$Se\ k<-4\!: \qquad \boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$$

7. Determina i valori del parametro per i quali la seguente equazione, nell'incognita x, soddisfa le condizioni indicate:

$$k^2x^2 - 2\,(k+2)\,x + 1 = 0$$

A. le radici sono reali;

Perché le radici siano reali, dev'essere $\Delta \geq 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = (k+2) - k^2 = k^2 + 4k + 4 - k^2 = 4k + 4 \geq 0 \qquad \boldsymbol{k \geq -1}$$

B. una radice è nulla;

Basta sostituire $x = 0$ nell'equazione e trovare il valore di k corrispondente:

$$1 = 0 \qquad \nexists \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

C. le radici sono opposte;

Se le radici sono opposte, significa che la somma delle radici è nulla:

$$2\frac{k+2}{k^2} = 0 \qquad k + 2 = 0 \qquad k = -2$$

La soluzione non è accettabile, perché minore di – 1.

D. le radici sono reciproche;

Questo significa che il loro prodotto vale 1:

$$x_1x_2 = 1 \qquad \frac{1}{k^2} = 1 \qquad k^2 = 1 \qquad k = \boldsymbol{\pm 1}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili.

E. le radici sono concordi;

Questo significa che il prodotto è positivo, ma:

$$\frac{1}{k^2} > 0 \qquad \forall \boldsymbol{k \geq -1}$$

F. la somma dei quadrati dei reciproci delle soluzioni vale 2.

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2\,(x_1x_2)^2$$

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = 2\left(\frac{c}{a}\right)^2 \qquad b^2 - 2ac = 2c^2 \qquad 4\,(k+2)^2 - 2k^2 = 2$$

$$2\,(k^2 + 4k + 4) - k^2 = 1 \qquad k^2 + 8k + 7 = 0 \qquad k_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 7} = \left\langle \begin{array}{ll} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{acc.} \\ -7 & n.a. \end{array} \right.$$

8. Trova due numeri naturali, sapendo che la loro differenza è 11 e la differenza tra il quadruplo del quadrato del minore e il quadrato del maggiore è 159.

Indico i due numeri con $N_1 = x$ e $N_2 = x + 11$. Imposto l'equazione:

$$4x^2 - (x+11)^2 = 159 \qquad 4x^2 - x^2 - 22x - 121 = 159$$

$$3x^2 - 22\,x - 280 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 840}}{3} = \frac{11 \pm 31}{3} = \left\langle \begin{matrix} 14 \\ \left[-\frac{20}{3}\right] \end{matrix} \right.$$

La seconda soluzione non è accettabile, in quanto il testo parla di due numeri naturali. Perciò:

$$N_1 = \mathbf{14} \qquad N_2 = \mathbf{25}$$

9. Un numero intero è formato da due cifre. La somma dei quadrati delle cifre è 85, mentre la somma dello stesso numero con quello formato dalle stesse cifre scambiate di posto è 121.

Il numero da determinare è: $N = 10\,x + y$.
La somma dello stesso numero con quello formato dalle stesse cifre scambiate di posto è 121:

$$N' = 10\,y + x \qquad N + N' = 121 \qquad N + N' = 10x + y + 10y + x = 11x + 11y$$

$$11\,(x+y) = 121 \qquad x + y = 11 \qquad y = 11 - x$$

La somma dei quadrati delle cifre è 85:

$$x^2 + (11 - x)^2 = 85 \qquad x^2 + 121 - 22x + x^2 - 85 = 0$$

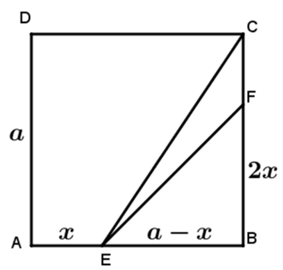
$$x^2 - 11\,x + 18 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{matrix} 9 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

Le due soluzioni sono:

$$N_1 = \mathbf{92} \qquad N_2 = \mathbf{29}$$

10. Siano E e F due punti appartenenti rispettivamente ai lati consecutivi AB e BC di un quadrato di lato a tali che $BF \cong 2\,AE$. Determina la misura di AE, sapendo che il quadrilatero $AECD$ ha area tripla di quella del triangolo EBF.

Pongo $\overline{AE} = x$. Esprimo le aree in funzione dell'incognita e ricordando che il quadrilatero $AECD$ è un trapezio, in quanto ha una coppia di lati opposti paralleli, AE e CD, visto che il primo giace su un lato del quadrato e l'altro è un lato del quadrato:



$$\frac{x+a}{2} \cdot a = 3 \cdot \frac{2x(a-x)}{2} \qquad ax + a^2 = 6ax - 6x^2$$

$$6x^2 - 5ax + a^2 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{5a \pm \sqrt{25\,a^2 - 24\,a^2}}{12} = \left\langle \begin{matrix} \boldsymbol{\frac{a}{2}} \\ \boldsymbol{\frac{a}{3}} \end{matrix} \right.$$

11. La somma dei perimetri di due quadrati è $60\ cm$, mentre la somma delle loro aree è $137\ cm^2$. Determina i lati dei due quadrati.

Indico con x_1 il lato del primo quadrato e con x_2 il lato del secondo quadrato. Ne risulta:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 60 \\ x_1^2 + x_2^2 = 137 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 15 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 137 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 15 \\ x_1x_2 = 44 \end{cases}$$

Conoscendo somma e prodotto di due numeri, posso determinare i due numeri – ovvero i lati dei due quadrati – risolvendo l'equazione di secondo grado $x^2 - sx + p = 0$, dove $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1x_2$:

$$x^2 - 15\,x + 44 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 176}}{2} = \frac{15 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{matrix} 11 \\ 4 \end{matrix} \right.$$

Ovvero i due lati sono $\mathbf{4}$ e $\mathbf{11}$.

12. L'equazione $x^2 - 9x + 3 = 0$ ha per soluzioni r e s. Se $x^2 + bx + c = 0$ ha per soluzioni r^2 e s^2, quanto valgono i parametri b e c?

Ricordando che in un'equazione di secondo grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ la relazione tra i coefficienti dell'equazione e le soluzioni sono:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

dalla prima equazione possiamo determinare:

$$r + s = 9 \qquad rs = 3$$

Perciò:

$$r^2 + s^2 = (r+s)^2 - 2rs = 9^2 - 2 \cdot 3 = 81 - 6 = 75 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b = -75}$$

$$r^2s^2 = (rs)^2 = 3^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c = 9}$$